ВСЕРОССИЙСКИЙ МОЛОДЕЖНЫЙ КОНКУРС ПО ПРОБЛЕМАМ КУЛЬТУРНОГО НАСЛЕДИЯ, ЭКОЛОГИИ И БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

«ЮНЭКО»

Направление: Математика

Тема: Применение памятки продвинутого девятиклассника:

ФСУ вне школьной программы

Соискатель: Бажанова Дарья

Научный руководитель: Лучевникова Татьяна Геннадьевна

Место выполнения работы: Строитель, Белгородская область

2026

1. Акуальность

Я учусь в 10 классе. Мой опыт- сдача ОГЕ в июне 2026 года. Формулы сокращенного умножения (ФСУ) — фундамент школьной программы, но стандартный курс ограничивается квадратами и кубами суммы, разностями двух выражений. Понимаем, что работа с многочленами, а именно умножение многочлена на многочлен- формулы сокращенного умножения упрощают решение. Мы называем, рациональное решение (короткое решение)

Ставим перед собой цель: вывести новые незнакомые для учащихся формулы сокращенного умножения. Дать анализ известным формулам сокращенного умножения, определить направления исследования, поиска новых формул. Показать примеры их применения при решении различных видов задач.

Задачи: найти необычное в обычных формулах, посмотреть на изученные формулы с разных точек зрения, изучить литературу о формулах сокращенного умножения; найти информацию в сети Интернет; определить новые формулы, отобрать задачи по данной теме.ознакомится с материалом главы «Многочлены», с другими главами учебника **[10],** и задачника 8,9,10 класс **[11],** отобрать задачи из задачника,проанализировать задачи, указанные в ресурсах. Увидеть закономерность использования формул, выявить направления исследования и получения новых формул. Подобрать конкурсные и олимпиадные задачи, в решении которых используются знакомые и незнакомые для учащихся формулы сокращенного умножения, составить справочную таблицу формул вмоей брошюре «Применение памятки продвинутого девятиклассника: ФСУ вне школьной программы»

Гипотеза: Решение нестандартных задач, задач повышенного уровня, олимпиадных задач требует применения знакомых формул сокращенного умножения в незнакомой, нестандартной ситуации и применения новых неизвестных в школьном курсе формул сокращенного умножения. Если получить новые формулы, используя уже изученные в школьном курсе формулы сокращенного умножения, то эти формулы можно применить при упрощении выражений, разложении на множители, решении уравнений, что поможет сократить преобразование сложных выражений, незнакомую задачу привести к знакомой и найти способ её решения.

Предмет исследования: Формулы сокращенного умножения

Объект исследования: направления выявления новых формул, новые формулы

Методы: анализ, сравнение, выявление закономерности, аналогия, расчеты, вычисления, решение задач.

Методы исследования:самостоятельная работа; помощь коллег, научного руководителя;ознакомится с материалом главы «Многочлены», с другими главами учебника и задачника, понаблюдать; подметить закономерность.

Результат работы – брошюра «Памятка продвинутого девятиклассника: ФСУ вне школьной программы» Особенность работы заключается в том, что в ходе изучения различной литературы, материалов Интернета отбирались новые формулы, автор предлагает и свои способы доказательства найденным формулам. Таким образом, обзор информации по данной теме дается на протяжении всей работы, есть ссылки на источники. В целом необходимо отметить, что подробная справочная таблица в изученной литературе отсутствует, частично формулы есть в источниках и основные формулы, знакомые учащимся из школьного курса, есть в любых справочниках по математике.

Основные понятия.

Формула-комбинация математических знаков, выражающая какое-нибудь утверждение **[12].**

Слово «формула» произошло от латинского «formula», что означает краткое обозначение, которое позволяет выразить какие-либо умозаключения, общие научные правила и

частные положения с помощью условных обозначений. В результате даже самые сложные предложения могут быть записаны в простой, удобной, лаконичной форме. Как и все прочие гениальные изобретения, формулы совершили настоящий переворот в науке. Главным их достоинством является то, что ученые со всех концов земного шара могут общаться друг с другом на понятном и универсальном языке, что значительно упрощает координацию масштабных исследований и позволяет экономить время **[6]**.

Гипотезой называется предположение, объясняющее какую – либо закономерность; *проверка или доказательство гипотезы* – это рассуждение, в результате которого гипотеза становится законом (правилом, формулой) или отвергается, как ошибочная. **[14], [12]**. «*Бином»* – в математике: двучлен), то есть (a+x) **[18],[12]**.

Формулы сокращенного умножения школьного курса:

Имеется несколько случаев, когда умножение одного многочлена на другой приводит к компактному, легко запоминающемуся результату. В этих случаях предпочтительнее не умножать каждый раз один многочлен на другой, а пользоваться готовым результатом, формулами **[9]**. Рассмотрим эти случаи.

1. .Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого плюс удвоенное произведение первого на второе плюс квадрат второго выражения.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (1) или **$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$**

2. Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого минус удвоенное произведение первого на второй плюс квадрат второго выражения.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (2) или **$a^2-2ab+b^2= (a-b)^2$**

3. Произведение суммы двух величин на их разность равно разности их квадратов.

***(*a+b)(a-b)=a^2-b^2 (3)** или **$a^2-b^2= (a+b)\ (a-b)$**

4.Куб суммы двух величин равен кубу первой плюс утроенное произведение квадрата первой на вторую плюс утроенное произведение первой на квадрат второй плюс куб второй.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (4)

5.Куб разности двух величин равен кубу первой минус утроенное произведение квадрата первой на вторую плюс утроенное произведение первой на квадрат второй минус куб второй.

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (5)

6. Произведение суммы двух величин на неполный квадрат разности равно сумме их кубов.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ (6) или **$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$**

7. Произведение разности двух величин на неполный квадрат суммы равно разности их кубов. **$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ (7)** или **$a^3-b^3= (a-b)(a^2+ab+b^2)$**

Формулы сокращенного умножения имеют широкое применение в математике, особенно в старших классах. Их используют: при решении уравнений, раскрытии скобок, разложении многочленов на множители, нахождении значений выражений, упрощение выражений. Видите, сколько функций позволяют выполнять формулы сокращенного умножения, поэтому знать их нужно очень хорошо. Анализируя известные формулы сокращенного умножения, выявим направления исследования, с целью получения новых незнакомых для учащихся формул сокращенного умножения, формул сокращенных вычислений.

2.Направления исследования:

2*.1. Первое направление*. Формулы разности квадратов (формула3); суммы и разности кубов (формулы 6,7).

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Выявив закономерность (гипотеза) в правой части, можно предположить новые формулы: $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ **;**

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

все данные формулы доказываются непосредственным раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых в правой части.

Например: Доказать формулу: а) $a^3+b^3= (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Имеем $(a+b)(a^2-ab+b^2) =a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2-b^3$. Приводя подобные слагаемые, мы видим, что $(a+b)(a^2-ab+b^2) =a^3+b^3$, что и доказывает нужную формулу.

б) Доказать формулу: $a^5+b^5= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$. Имеем $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) = a^5-a^4в+a^3в^2-a^2в^3+ав^4+a^4в-a^3в^2+a^2в^3-ав^4+в^5= a^5+в^5$. Данная формула доказана.

Вывод. Для любого натурального п справедливы формулы для n-ой степени:

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, где $n \in N$

$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - ... - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$, где $n \in N$

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$, где $n \in N$.

Применение данных формул.

Данные формулы используются в задачах на делимость чисел, на доказательство кратности чисел, сравнение чисел: Например. Так как $a^5+b^5= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$, то a^5+b^5 без остатка делится на (a + b), где а и в –натуральные числа.

Задача №2.7(а). (**[11]**). Докажите, что сумма $17^{11}+5^{11}$ делится без остатка на 22.

Задача. Доказать, что при любом натуральном k значение выражения $(3k+1)^2-(3k-1)^2$ делится на 12. **[9]**.

Решение. Воспользовавшись формулой(3): $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$,

упростим данное выражение: $(3k+1)^2-(3k-1)^2=(3k+1-3k+1)(3k+1+3k-1)=2*6k=12k$

Полученное выражение 12k делится на 12 без остатка.

Задача. [10]. Найдите значения числового выражения, выполнив соответствующие преобразования: $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)-2^{16}$.

Решение. $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)-2^{16} =(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)-2^{16} =$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)-2^{16} = (2^8-1)(2^8+1)-2^{16} = \cancel{2^{16}} - 1 - \cancel{2^{16}} = -1$. Ответ: -1

Задача. Разложить на множители многочлен x^6-2^6. Представим данный многочлен x^6-2^6 в виде разности кубов двух выражений и, применив формулу, получим:

$x^6-2^6=(x^2-2^2)(x^4+4x^2+16) =(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)$.

Этот пример можно решить и вторым способом. Для этого представим данный многочлен x^6-2^6 в виде разности квадратов двух выражений, получим:

$x^6-2^6=(x^3)^2-(2^3)^2=(x^3-2^3)(x^3+2^3)$.

Теперь мы получили выражение, состоящее из двух сомножителей: разности кубов двух выражений и суммы кубов двух выражений. Применим эти формулы:

$x^6-2^6=(x^3)^2-(2^3)^2=(x^3-2^3)(x^3+2^3)= (x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)=(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)$.

Новые формулы:

А). $\mathbf{a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)}$;

Б). $\mathbf{a^6 - в^6 = (a-в)(a+в)(a^4+a^2в^2+в^4) = (a-в)(a+в)(a^2+ав+в^2)(a^2 - ав+в^2)}$;

$\mathbf{a^6+в^6 =(a^2+в^2)(a^4- a^2в^2+в^4)}$;

$\mathbf{a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)}$;

$\mathbf{a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)}$;

В). $\mathbf{a^4+a^2в^2+в^4= (a^2+ав+в^2)(a^2 - ав+в^2)}$;

Г). $\mathbf{a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)}$.

2. 2. ***Второе направление.*** **Формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений.**

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$, **(1)**

$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$, **(2)**

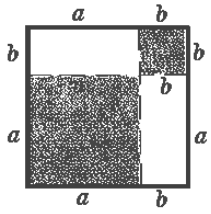
Второе направление поиска новых формул – это формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений.
Часто при решении задач используется формулы**:**
$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ и $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab.
$a^2 + в^2=(a+в)^2-2ав$, $(a - в)^2= (a+в)^2- 4ав.$ [18].
Интересная формула получится, если произведение двух чисел выразить через их разность и сумму, в изученной литературе автор такую формулу не встречал, это новая оригинальная формула легко выводиться из формул (1) и (2).
$ав = (\frac{a+в}{2})^2 – (\frac{a-в}{2})^2$.
При использовании формул квадрата суммы или квадрата разности надо помнить, что
$(– a – b)^2 = (a + b)^2$;
$(b – a)^2 = (a – b)^2$. Это следует из того, что $(– a)^2 = a^2$.
Формулы (1), (2) употребляются в математике и смежных дисциплинах довольно часто, приведем примеры их использования.
*Примеры применения формул***.**
Задача[9].
Упростить выражение: $(x^2 –ax+ b)(b + x^2 – ax)+(ax–b)(ax–b)+(–ax+ x^2 + b)(ax – b)* 2$.
Решение: $(x^2 – ax + b)(b + x^2 – ax) + (ax – b)(ax – b) +(– ax + x^2 + b)(ax – b)* 2 =$
$= x^2b – axb + b^2 + x^4 – ax^3 + bx^2 – x^3a + a^2x^2 – bax + a^2x^2 – bax + b^2 – bax + 2(–a^2 x^{2)} + 2x^3a + 2bax + 2bax – 2bx^2 –2 b^2 = x^4$
Вывод: Вычисление занимает много времени. А для упрощения работы можно применить формулы сокращенного умножения.
2 способ решения. $(x^2 – ax + b)(b + x^2 – ax) + (ax – b)(ax – b) +(– ax + x^2 + b)(ax – b)* 2 =$
$= (x^2 – ax + b + ax – b)^2 = (x^{2)2} = x^4$.
Обратите внимание, как быстро и легко упростили это выражение с помощью формулы квадрата суммы **$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**, в формуле вместо *a* и *b* могут быть числа, одночлены, многочлены и их комбинации и т. д.
Задача №2.39(б). [11]. Найдите все тройки чисел, удовлетворяющих уравнению: $x^2+y^2+z^2 – xy - yz – zx = 0$.
Решение. Это задача повышенного уровня, легко решается, если умножить обе части уравнения на 2 и применить формулу квадрат разности двух чисел трижды. $2x^2+2y^2+2z^2 – 2xy - 2y z – 2zx = 0$. Получим: $(x-y)^2+(x -z)^2 + (y - z)^2=0$; $x =y = z$.
Ответ : (t,t,t), t- любое число.

Отметим, что на формулах (1) и (2) основаны некоторые математические фокусы, позволяющие производить вычисления в уме. Например, можно практически устно возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 1 и 9. В самом деле
$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2 • 70 • 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$;
$91^2 = (90 + 1)^2 = 90^2 + 2 • 90 • 1 + 1^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281$;
$69^2 = (70 – 1)^2 = 70^2 – 2 • 70 • 1 + 1^3 = 4900-140+1 = 4761$.
Иногда можно быстро возвести в квадрат и число, оканчивающееся цифрой 2 или цифрой 8. Например: $102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2 • 100 • 2 + 2^2 = 10\,000 + 400 + 4 = 10404$;
$48^2 = (50 – 2)^2 = 50^2 – 2 • 50 • 2+ 2^2 = 2500 – 200 +4 = 2304$.
Но самый элегантный фокус связан с возведением в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5. Проведем соответствующие рассуждения для 85^2. Имеем:
$85^2 = (80 + 5)^2 =80^2 + 2•80•5 + 5^2 =80(80+10)+25 = 80 • 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225$.
Замечаем, что для вычисления 85^2 достаточно была умножить 8 на 9 и к полученному результату приписать справа 25. Аналогично можно поступать и в других случаях. Например, $35^2 = 1225$ (3 • 4 = 12 и .к полученному числу приписали справа 25); $65^2 = 4225$; $125^2 = 15625$ (12 • 13 = 156 и к полученному числу приписали справа 25).
Найдем общую закономерность и выведем новую формулу:
$(10п +5)^2= 100п^2+100п +25= п(п+1)*100 +25$.

$(10п+5)^2 = п(п+1)*100 +25.$

Задача. а) Вычислите 11^2, 101^2, 1001^2, **$(10^п+1)^2= 10^{2п}+2*10^п+1$**. Попробуйте угадать закономерность $100…01^2=$, где всего п цифр, используя ее, вычислите 10001^2,1000001^2.

б). Попробуйте угадать закономерность и вычислите $\underline{9…9^2}$, где цифра 9 повторяется п раз. Используя новую формулу **$(10^п - 1)^2= 10^{2п} - 2*10^п+1$**, вычислите 99999^2,9999999^2. **[2]**.



Любопытные обстоятельства, связанные со скучными (на первый взгляд) формулами (1) и (2), можно дополнить следующим геометрическим рассуждением. Пусть a и b — положительные числа. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b$ и вырежем в двух его углах квадраты со сторонами, соответственно равными a и b (рис. 1).

Рис. 1. Площадь квадрата со стороной $a + b$ равна $(a + b)^2$. Но этот квадрат мы разрезали на четыре части: квадрат со стороной a (его площадь равна a^2), квадрат со стороной b (его площадь равна b^2), два прямоугольника со сторонами a и b (площадь каждого такого прямоугольника равна ab). Значит, **$(a+b)^2=a^2+ b^2 +2ab$, т**. е.получили формулу (1).

Новые формулы: Если есть квадрат суммы двух выражений, значит можно вывести квадрат суммы трех выражений, четырех и т.д., **$(a + b+ c)^2 = a^2 + b^2+c^2 + 2ab+2ac+2bc.$**

Это формула имеет геометрическое обоснование. Площадь квадрата со стороной $(a+ b+c)$ равна $(a + b+c)^2$. Этот квадрат можно разрезать на части: по диагонали - квадрат со стороной a (его площадь равна a^2), квадрат со стороной b (его площадь равна b^2), квадрат со стороной c (его площадь равна c^2), два прямоугольника со сторонами a и b (площадь каждого такого прямоугольника равна ab), два прямоугольника со сторонами a и c (площадь каждого такого прямоугольника равна ac). два прямоугольника со сторонами b и c (площадь каждого такого прямоугольника равна bc).

Значит, **$(a + b+ c)^2 = a^2 + b^2+c^2 + 2ab+2ac+2bc$**, т. е. получили данную формулу .

Если заменить выражение **в** на **– в,** то получим новую формулу:

$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac − 2bc.$

Если заменить выражение **с** на **– с,** то получим формулу:

$(a + b − c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab − 2ac − 2bc.$

Справедлива формула:

$(a - b − c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab − 2ac + 2bc.$

Докажем новую формулу:

а) **$(a + b +c+d)^2= a^2 + b^2+ c^2 + d^2+2ab + 2ac + 2a d +2bc+2 b d+ 2c d.$**

Доказательство: $(a +b +c+ d)^2 =(a +b +c+ d)(a + b +c+ d)=a^2 +ab + ac + a d+ ab+b^2+bc+bd + ac+ bc+ c^2 +c d+ a d+ db + dc+ d^2= a^2 + b^2+ c^2 + d^2+2ab +2ac + 2a d +2bc+2 b d+2c d$, что и доказывает нужную формулу.

б) **$(a + b –c- d)^2= a^2 + b^2+ c^2 + d^2+2ab - 2ac -2a d -2bc -2 bd+ 2cd.$**

Аналогичные формулы можно получить, заменяя **в** на **–в** и т.п. Новые формулы этого пункта используются при решении задач №1.5,№1.7; №2.11, № 2.12; № 2.5 и других.**[11]**.

Для любых отрицательных чисел $x<-1$ выполняется неравенство $x^3<- x^2+2$, $x^3+ x^2< 2$, $x^2 (x +1) < 2$, так как отрицательное число всегда меньше положительного. Графики функций $y=x^3$ и $y=-x^2+2$ при $x<-1$ и при $x > 1$ не имеют общих точек.

1. Если $a^4+4 = a^2+2 - 2a$, тогда:

$a^4+4 - a^2 - 2 + 2a = 0;$

$a^4 - a^2 +2 + 2a = 0;$

$a^2(a^2-1) + 2(a +1) = 0;$

$a^2(a-1)(a+1) + 2(a +1) = 0;$

$(a+1)$ $((a- 1) a^2 + 2) = 0;$

$(a+ 1)$ $(a^3 - a^2 + 2) = 0;$ Данное уравнение имеет один корень $a= - 1.$

Вывод: в условии данной задачи надо отметить, что а – целое число, не равное 1 и -1, иначе при а= -1, выражение $a^4+4= 5$, является простым, а не составным числом.

Новые формулы:

$а^4+4в^4= (а^2+2в^2 – 2ав)(а^2+2в^2 +2ав).$
$а^4+4=(а^2+2 – 2а)(а^2+2 +2а).$
Задача №2.4(б).[11].Разложите многочлен на множители**: $х^4+4у^4$.** Применив полученную формулу, решить задачу легко и быстро.

1.3. *Третье направление.* Произведение двучленов. Коэффициенты многочлена п- й степени. Бином Ньютона.

Найдем произведение двучленов: $(х-а)(х-в) = х^2 –ах-вх+ав = х^2 –(а+в)х+ав$. Аналогично найдем произведение трех двучленов:$(х-а)(х-в)(х-с)=х^3-(а+в+с)х^2+(ав+ас+ вс) х – авс$.

Сформулируем гипотезу:

$(х-а)(х-в)(х-с)(х-д)= х^4-(а+в+с+д)х^3+(ав+ас+ад+вс+вд+ сд))х^2–(авс+авд+асд+всд) х +авсд$.

Проверяется предположение выполнением умножения двучленов**,** с последующей группировкой слагаемых с одинаковыми степенями х. Выведенные формулы можно использовать при определение коэффициентов многочлена п- й степени. **[18]**

Пусть требуется найти произведение п таких двучленов, раскрывая скобки и группируя члены с одинаковыми степенями х, получим многочлен, расположенный по убывающим степеням х: $Р_п (х) = (х-а)(х-в)(х-с)(х-д)…(х-р)$.

$Р_п(х)= х^п- х^{п-1}(а+в+с+д+…+р) + х^{п-2}(ав+ ас+ ад+…) -х^{п-3}(авс +авд+…) +…. +(1)^п (авсд…)$

$Р_п (х) = а_0 х^п+ а_1х^{п-1}+а_2х^{п-2}+…+а_п.$

Нетрудно заметить, что:

- Старший коэффициент $а_0$ многочлена $Р_п (х)$ равен 1.
- Члены имеют знакочередующиеся коэффициенты;
- Каждый коэффициент $а_к$ равен сумме всевозможных произведений вторых членов, стоящих в скобках, по к сомножителей в каждом произведении. **[18]**

Вывод: Если найти произведение п одинаковых двучленов, раскрывая скобки и группируя члены с одинаковыми степенями х, получим многочлен, расположенный по убывающим степеням х, например:

$(х-а) (х-а)= х^2 –(а+а)х+аа= х^2 –2ах+а^2$.

$(х-а) (х-а) (х-а) = х^3 - 3 а х^2 + 3 а^2 х - а^3$,

$(х-а) (х-а) (х-а) (х-а)= х^4 - 4 а х^3 + 6 а^2 х^2 - 4 а^3х + а^4$,

формулы для четвёртой степени

$(х-а)^4= х^4 - 4 а х^3 + 6 а^2 х^2 - 4 а^3х + а^4$,

$(х+а)^4= х^4 + 4 а х^3 + 6 а^2 х^2 +4 а^3х + а^4$.

При решении задач иногда необходимо раскрыть скобки, умножая шесть двучленов **(п-3) (п-2)(п-1) (п+1)(п+2) (п+3).**

Если применить полученный нами результат, то имеем:

$(п-3)(п-2)(п-1)(п+1)(п+2)(п+3)=$**$п^6$**$+(-3-2-1+1+2+3)$**$п^5$**$+(6+3-3-6-9+2-2-4-6-1-2-3+2+3+6)$**$п^4$**$+(-6+6+12+18+3+6+9-6-9-18+2+4+6-4-6-12-2-3-6+6)$**$п^3+49п^2+(-3*(-2)*(-1)*1*2*3)$**$=п^6–14п^4+49п^2 -36 = п^2(п^4 – 14п^2 +49) -36 =п^2 (п^2 -7)^2-36$.

Количество слагаемых в первых скобках равно шести, во вторых скобках: $С_6^2=15$, в третьих скобках: $С_6^3=20$, в четвертых скобках: $С_6^4=15$. Для подсчета слагаемых в четвертой скобке можно использовать таблицу перебора произведений четырех сомножителей из шести чисел:

Числа																Сумма
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3						
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2					-2	-2	-2	-2		
-1	-1	-1	-1				-1	-1	-1		-1	-1	-1		-1	
1	1			1	1			1	1	1	1	1		1	1	
2		2		2		2	2	2		2	2		2	2	2	

3			3		3	3	3		3	3		3	3	3	3	
Произведение чисел	**-6**	**-12**	**-18**	**12**	**18**	**36**	**18**	**6**	**9**	**-18**	**4**	**6**	**12**	**-12**	**-6**	**49**

Необходимо отметить, что это не лучший способ раскрытия скобок. Другой, более удобный способ, с использованием формул сокращенного умножения, предложен далее.

Применение полученных формул.

Задача. [5] Проверим, что имеет место тождество для п>3:

(п-3) (п-2)(п-1) (п+1)(п+2) (п+3) +36 = $п^2$ ($п^2$ -7)^2.

Заметим, что (п-3)(п+3) = $п^2$-9, (п-2)(п+2) = $п^2$-4, (п-1)(п+1) = $п^2$-1.

Умножая скобки ($п^2$-9) ($п^2$-4) ($п^2$-1) получим $п^6$ – 14$п^4$+49$п^2$ -36.

$п^6$ – 14$п^4$+49$п^2$ -36+ 36 = $п^2$($п^4$ – 14$п^2$ +49) =$п^2$ ($п^2$ -7)^2, что и требовалось доказать.

Многие формулы являются частным случаем бинома Ньютона. **[18]**

Бином Ньютóна — формула для разложения на отдельные слагаемые целой не отрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

, где $C_п^к = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

— биномиальные коэффициенты, *n* - неотрицательное целое число.

$(x-a)^п = x^п - п\,a\,x^{п-1} + C_п^2 a^2 x^{п-2} - C_п^3 a^3 x^{п-3} + \ldots + (-1)^п a_п$.

Коэффициенты $C_п^к$ берутся из таблицы, которую называют таблицей биноминальных коэффициентов. **[18]**

n=1 1

n=2 2, 1

n=3 3, 3, 1

n=4 4, 6, 4, 1

n=5 5, 10, 10, 5, 1

n=6 6, 15, 20, 15, 6, 1

n=7 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

n=8 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

n=9 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1 ит.д

Например:

а) **$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$.**

б) $(a+b)^8 = a^8b^0 + 8a^7b^1 + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8a^1b^7 + a^0b^8 =$

$= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$.

Из формулы: $(x-a)^п = x^п - п\,a\,x^{п-1} + C_п^2 a^2 x^{п-2} - C_п^3 a^3 x^{п-3} + \ldots + (-1)^п a_п$

Можно вывести целую серию формул для п=5,6,7…: $(а- в)^5$; $(а- в)^6$; $(а- в)^7$ и так далее .

В таком виде формула бином Ньютона была известна ещё индийским и исламским математикам; Ньютон вывел формулу бинома для более общего случая, когда показатель степени — произвольное рациональное число (возможно, отрицательное). Долгое время считалось, что для натуральных показателей степени эту формулу, как и треугольник, позволяющий находить коэффициенты, изобрёл Блез Паскаль, описавший её в XVII веке. Однако историки науки обнаружили, что формула была известна ещё китайскому математику Яну Хуэю, жившему в XIII веке, а также исламским математикам ат-Туси (XIII век), ал-Каши (XV век) и М. Штифелю (середина XVI). И. Ньютон около 1676 года обобщил формулу для произвольного показателя степени (дробного,отрицательного и др.)

В художественной литературе «бином Ньютона» появляется в нескольких запоминающихся контекстах, где речь идёт о чём-либо сложном.

- В рассказе А. Конан Дойля «Последнее дело Холмса» Холмс говорит о математике профессоре Мориарти:

Когда ему исполнился двадцать один год, он написал трактат о биноме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность. После этого он получил кафедру математики

в одном из наших провинциальных университетов, и, по всей вероятности, его ожидала блестящая будущность.

- Знаменита цитата из «Мастера и Маргариты» М. А. Булгакова: *«Подумаешь, бином Ньютона!»*. Позже это же выражение упомянуто в фильме «Сталкер» А. А. Тарковского.
- Бином Ньютона упоминается: в фильме «Расписание на послезавтра»; в повести Льва Толстого «Юность» в эпизоде сдачи вступительных экзаменов в университет Николаем Иртеньевым; в романе Е. И. Замятина «Мы», в прологе к «назидательным новеллам» Унамуно. **[18]**.

1.4 *Четвертое направление.* Формулы: куб суммы и куб разности.

Четвертое направление поиска новых формул определяют формулы: куб суммы, куб разности. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Новые формулы:

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$;

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$;

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$;

$a^3 + b^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$;

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$.

Применение формул:

П р и м е р. Вычислить 99^3,используя формулу куб разности. Р е ш е н и е : $99^3 = (100 - 1)^3 = 1000000 - 3 \cdot 10000 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1 - 1 = 970299$.

Задача №1.5(в) . **[11]**. Запишите многочлен в стандартном виде: $(2-x)^3 + (x-1)^3$.

Можно использовать первые две формулы и привести подобные слагаемые. Применение новой формулы: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, позволит сократить вычисления и получить результат быстрее.

Решение: Если а =2-х, в = х-1, то

$\mathbf{(2-x)^3+(x-1)^3} = (2-x+x-1)^3 - 3(x-1)(2-x)(2-x+x-1) = 1 - 3(2x-x^2-2+x) = 1-9x+3x^2+6 = \mathbf{3x^2-9x+7}$

Вывод: Новые формулы п.2.4. позволяют сокращать преобразования, могут быть использованы при решении задач на уроках алгебры профильного уровня, а также при решении экзаменационных и конкурсных задач.

2.5. *Пятое направление.* Теорема Виета и теорема о разложении квадратного трехчлена на множители.

Пятое направление поиска неизвестных формул - это теорема Виета и теорема о разложении квадратного трехчлена на множители: $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена.

В пункте 2.3 было отмечено, что

$(x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a+b)x + ab$.

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$.

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd))x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$.

$P_n(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-p)$.

$P_n(x) = x^n - x^{n-1}(a+b+c+d+\ldots+p) + x^{n-2}(ab+ac+ad+\ldots) - x^{n-3}(abc+abd+\ldots) + \ldots + (1)^n(abcd\ldots)$

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$.

Рассмотрим утверждение, которое полезно при нахождении корней многочленов.

Теорема 1 (обобщенная теорема Виета). [19].

Если уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ имеет корни $x_1, \ldots x_n$, то справедливы следующие равенства: $a_1 = -(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, $a_2 = x_1(x_2+x_3+\ldots+x_n) + x_2(x_3+x_4+\ldots+x_n) + \ldots x_{n-1}*x_n, \ldots, a_n = (-1)^n x_1x_2..x_n$.

В первой из этих формул в скобках стоит сумма всех корней, во второй, если раскрыть скобки, то получим сумму всех попарных произведений корней, и так далее. В последней формуле видим произведение всех корней с коэффициентом $(-1)^n$.

Применим эту теорему к кубическому уравнению $x^3+ вx^2+cx+д=0$ с корнями x_1, x_2, x_3, получим равенства $в= -(x_1+x_2+x_3)$; $c= x_1x_2 + x_2x_3+x_1 x_3$, $d= - x_1 x_2 x_3$.
Известная теорема Виета для корней квадратного уравнения является частным случаем данной теоремы.

Теорема 2(теорема Виета). Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+ вx+c=0$, то справедливы условия: $\mathbf{x_1 + x_2 = -\frac{в}{a}}$; $\mathbf{x_1\ x_2 = \frac{c}{a}}$. **[19]**.

Следствия из теоремы: $\mathbf{\frac{1}{x1} + \frac{1}{x2} = -\frac{в}{c}}$.

Используя теорему Виета, можно вычислять некоторые симметрические выражения от корней уравнения, не находя самих корней.
Следующие формулы иногда полезны при решении уравнений и систем методом введения новых переменных, если **а+в = p, ав = q.**
1/а +1/в =p/q,
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = p^2 - 2q$,
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3 ab (a + b) = p^3 - 3 p q$
$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2 q^2$, [15].
При решении задач №2.9, 2.10. задачника**[11]** , формулы п.2.5 упрощают преобразования.
Интересные задачи и новые формулы по этому направлению есть в книге «Сборник задач по алгебре для 8-9кл», учеб. пособие для школ и классов с углубл. изуч. математики/ М.Л. Галицкий и др, с.7-9, с.53**, [2]**, а также в сборнике ЕГЭ **2012 [15],** и **[19].**

2.6 *Шестое направление*. Сопряженные числа.

Шестое направление поиска новых формул связано с сопряженными числами. Соображения симметрии очень важны не только в геометрии, но и в алгебре. В трудных математических задачах иногда бывают ситуации, в которых число вида $a+b\sqrt{d}$ полезно заменить сопряженным $a - b\sqrt{d}$. Пары сопряженных чисел появляются, когда решаем квадратное уравнение, а корень из дискриминанта не извлекается: например уравнение $x^2 –x – 1 =0$ имеет пару «сопряженных» корней: $0{,}5\ (1-\sqrt{5})$ и $0{,}5\ (1 + \sqrt{5})$.
Интересны сопряженные числа тем, что произведение двух иррациональных чисел равно рациональному числу: $(a+b\sqrt{d})\ (a - b\sqrt{d}) = a^2 – b^2d$. Формула разности квадратов
$(a +b)(a –b)= a^2–b^2$ часто используется при преобразовании иррациональных выражений, при освобождении от иррациональности в знаменатели дроби.
При изучении темы: «Преобразование выражений, содержащих радикалы» учащиеся профильной группы 11 класса, решая задачи № 7.35 – 7.43 (**[11]**), испытали затруднения.
В задачнике «Кванта»: Математика. Часть 3/ Под ред. Н.Б.Васильева**[4],** на странице 56 предложена задача №6, повышенной сложности:
Задача. [4]. Освободится от иррациональности $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.
Для учащихся 11 класса подобные задачи предлагаются в задачнике **[11]**, с.41-46. Поэтому в данную работу был включен раздел «Сопряженные числа».
Вопрос: какое число считается сопряженным числу $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$?
У данного числа три «сопряженных» числа: $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.
Освобождение от знаменателя в данной задаче необходимо провести в два этапа.

$$\frac{1*(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})*(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1*(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+2\sqrt{2}+2)-3} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})*2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})*(2\sqrt{2})} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})*2\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6})}{8}.$$

Применение при решении задач.

Задача. Напишите уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$. **[4]**

Решение. Уже было отмечено, что пары сопряженных чисел появляются при решении квадратных уравнений, когда корень из дискриминанта не извлекается.

Гипотеза: Можно предположить, что вместе с данным числом, уравнению с целыми коэффициентами удовлетворяют и сопряженные числа:

$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Тогда искомое уравнение имеет вид:

$\mathbf{(x - 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0.}$

Умножая первую и третью скобки, вторую и четвертую, используя формулу разности квадратов двух выражений, получим

$((x-1)^2 - 5 - ((x-1)^2 - 5 - 2\sqrt{6})((x-1)^2 - 5 + 2\sqrt{6}) = 0;$

$((x^2-2x-4) - 2\sqrt{6})((x^2-2x-4) + 2\sqrt{6}) = 0;$

$(x^2-2x-4)^2 - 24 = 0;$

Применяя уже рассмотренную ранее формулу: $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$, *получим искомое уравнение*

$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8 = 0.$

Можно, подставляя сопряженные числа $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ убедиться, что они действительно являются корнями данного уравнения. Гипотеза подтвердилась. Ответ: $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8 = 0$.

Интересные формулы [4] :

$\mathbf{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q + r\sqrt{2} + s\sqrt{3} + t\sqrt{6}}$, где q , r, s, t- целые числа.

Если а и в – рациональные числа, а число $\sqrt{d}$ – иррациональное, то

$\mathbf{(a+b\sqrt{d})^n = q + r\sqrt{d}}$ **и** $\mathbf{(a - b\sqrt{d})^n = q - r\sqrt{d}}$

Вывод: Если выражение, зависящее от $\sqrt{d}$, равно $q + r\sqrt{d}$ и всюду в этом выражении заменить $\sqrt{d}$ на $-\sqrt{d}$, то новое выражение будет равно $q - r\sqrt{d}$.

Применение при решении задач.

Задача. Доказать, что уравнение не имеет решений в рациональных числах x, y, z и t

$\mathbf{(x + y\sqrt{5})^4 + (z + t\sqrt{5})^4 = 2 + \sqrt{5}}$.

Можно применить формулы сокращенного умножения. И приравнять коэффициенты слагаемых в левой и в правой частях, содержащих $\sqrt{5}$ и не содержащих $\sqrt{5}$.

Но есть удивительно простой способ решения – «заменить плюс перед $\sqrt{5}$ на минус».

$\mathbf{(x - y\sqrt{5})^4 + (z - t\sqrt{5})^4 = 2 - \sqrt{5}}$.

Слева стоит неотрицательное число, справа – отрицательное. Равенство неверно, значит, уравнение не имеет решений в рациональных числах x, y, z и t. **[4]**.

Задача. Докажите, что существует бесконечно много пар (x; y) натуральных чисел, для которых x^2 отличается от 2 y^2 на 1: $\mathbf{|x^2 - 2y^2| = 1}$. Можно ли записать общую формулу для этих решений? **[4]**

Решение. Найти ответ на вопрос поможет число $1+\sqrt{2}$ и ему сопряженное число $1-\sqrt{2}$.

Составим **таблицу 1:**

п	$(1+\sqrt{2})^n$	$X_п$	$У_п$	$(1-\sqrt{2})^n$
1	$1+\sqrt{2}$	1	1	$1-\sqrt{2}$
2	$3+2\sqrt{2}$.	3	2	$3-2\sqrt{2}$.
3	$7+5\sqrt{2}$	7	5	$7-5\sqrt{2}$
4	$17+12\sqrt{2}$	17	12	$17-12\sqrt{2}$
5	$41+29\sqrt{2}$	41	29	$41-29\sqrt{2}$

6				
7				
8	$577 + 408\sqrt{2}$	577	408	$577 - 408\sqrt{2}$

Какой будет шестая строчка? а) $(1+\sqrt{2})^6=(41+29\sqrt{2})^*(1+\sqrt{2})=\mathbf{99+70\sqrt{2}}$.

Или: $(1+\sqrt{2})^6= 1^6+ 6\sqrt{2}+15(\sqrt{2})^2+20(\sqrt{2})^3+15(\sqrt{2})^4+6(\sqrt{2})^5+(\sqrt{2})^6 = \mathbf{99+70\sqrt{2}}$.

б) Для вычисления $(1+\sqrt{2})^8$ удобнее использовать данную таблицу, а не пользоваться формулой: $(a+b)^8 =a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$

Коэффициенты x и y в числе $\mathbf{x+y\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n}$ будут давать искомую пару. Можно вывести формулы для нахождения $X_п$ и $У_п$. Колонка таблицы из сопряженных чисел дает равенство: $x - y\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^n$. Перемножая два последних равенства, получим

$x^2 –2y^2 = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n= (-1)^n$. Выражение $x^2 – 2y^2$ попеременно равно 1 или -1. Складывая и вычитая эти же два равенства , получим формулы:

$X_п = ((1+\sqrt{2})^n +(1-\sqrt{2})^n)/2$, $У_п = ((1+\sqrt{2})^n +(1-\sqrt{2})^n)/2\sqrt{2}$.

При решении задач полезны формулы, выражающие пару последующую через пару предыдущую: $\mathbf{x_{n+1}= x_n+2y_n}$; $\mathbf{y_{n+1}= x_n+y_n}$

Теперь легко вычислить седьмую и восьмую строчки таблицы, учитывая, что $x_6=99$, $y_6=70$:

$x_7 = 99+140= 239$, $y_7=99+70= 169$,

$x_8=239 + 338 = 577$; $y_8=239 +169= 408$.

Вывод: таблица1. интересна тем, что она помогает быстро вычислять п-ю степень числа $1+\sqrt{2}$: $(1+\sqrt{2})^n = x+y\sqrt{2}$.

Комплексные числа **a +i b** и **a – ib** , где i –мнимая единица, тоже называют сопряженными. Интересны знакомые формулы сокращенного умножения на множестве комплексных чисел:

[1] $\mathbf{(a+ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2}$,

[2] $\mathbf{(a – ib)^2 = a^2 – 2i ab - b^2}$,

[3] $\mathbf{(a + ib)(a – ib) = a^2 + b^2}$,

[4] $\mathbf{(a + ib)^3 = a^3 + 3a^2i b - 3ab^2 - ib^3}$,

[5] $\mathbf{(a – ib)^3 = a^3 – 3i a^2 b - 3ab^2 + ib^3}$,

[6] $\mathbf{(a+ib)(a^2 – iab - b^2) = a^3 - ib^3}$,

[7] $\mathbf{(a – ib)(a^2 + iab - b^2) = a^3+i b^3}$.

3. Решение различных задач на применение формул сокращенного умножения, новых формул.

Задача. Разложить на множители: $(x^2-1+x)(x^2-1+3x)+x^2$.

Решение.

1 способ

Из формулы: $(а+в+с)^2= а^2+ в^2+ с^2+2ав+2ас+2вс$, получим новую формулу: $(а- в+с)^2= а^2+ в^2+ с^2- 2ав+2ас- 2вс$, изменив в на –в.

Выполним преобразование:

$(x^2-1+x)(x^2-1+3x)+x^2= x^4 - x^2+3x^3- x^2+1-3x + x^3- x+3x^2+ x^2=$

$= \mathbf{x^4}+4x^3+2x^2-4x+\mathbf{1}= \mathbf{(x^2)^2}+ \mathbf{1}+ \mathbf{(2x)^2} - 2x^2+4x^3-4x= \mathbf{(x^2 – 1+2x)^2}$.

Результат преобразований представили в виде суммы трех квадратов и удвоенных произведений выражений со знаками «+» и «-», применив формулу квадрата алгебраической суммы трех слагаемых, получили : $(x^2-1+x)(x^2-1+3x)+x^2= \mathbf{(x^2 – 1+2x)^2}$

2 способ *(способ решения, предложенный автором работы, отличный от способа, предложенного в пособии).*

Введем подстановку $\mathbf{x^2-1+2x= a,}$ тогда $x^2-1+x = a- x,$ $x^2-1+3x=a+x.$
Данное в условии выражение приводится к известной формуле разности квадратов двух выражений**:** $\mathbf{(a-x) (a+x)} +x^2= \mathbf{a^2 - x^2}+ x^2= a^2 = (x^2-1+2x)^2.$
$(x^2-1+x)(x^2-1+3x) +x^2= \mathbf{(x^2 – 1+2x)^2}$

3 способ, предложенный в учебном пособии.
Введем подстановку $x^2-1+x=$ м, тогда $x^2-1+x =$ м, $x^2-1+3x=$м$+2x.$
Данное в условии выражение приведем к виду:
м* (м$+2x) +x^2=$ $\mathbf{м^2 +2мх + x^2= (м+x)^2}$. Знакомая формула квадрата суммы двух выражений, позволяет без особых затруднений разложить данное выражение на множители. $(x^2-1+x)(x^2-1+3x) +x^2= (x^2-1+x+x)^2=$ $\mathbf{(x^2 – 1+2x)^2}$
При разложении на множители использованы формулы сокращенного умножения, знакомые и новые: формулы «квадрат суммы двух слагаемых», «разность квадратов» и «квадрат алгебраической суммы трех слагаемых».
Автор работы предлагает свои задачи:
1. Разложить на множители $(x^2-2+3x)(x^2-2+9x) +8x^2.$
Решение. Используя второй или третий способы решения, получим
$(x^2-2+3x)(x^2-2+9x) +8x^2= (x^2-2+5x)(x^2-2+7x).$
2. Решите уравнение: А). $(x^2-2+3x)(x^2-2+9x) +8x^2=0.$ Б). $(x^2-1+x)(x^2-1+3x) +x^2=0.$

Данные уравнения решаются способом разложения правой части на множители.
Задача. XXXV Всероссийская математическая олимпиады школьников. Региональный этап, 2009год.
Докажите, что 1-ав является квадратом рационального числа, если рациональные числа а и в удовлетворяют равенству $а^3в +ав^3 + 2а^2в^2+ 2а+2в+1=0.$ (Р.Женодаров)
Решение. В материалах олимпиады предлагается два способа решение*, автор работы предлагает свой способ решения*. Зная формулу $\mathbf{(a + b+ c)^2 = a^2 + b^2+c^2 + 2ab+2ac+2bc,}$ можно заметить, что $2а+2в+1$ – это удвоенные произведения и квадрат числа, необходимо добавить еще два квадрата и одно удвоенное произведение, получим
$2а+2в+1+2ав + а^2 + в^2.$
Из данного в условии равенства имеем: $2а+2в+1 = -а^3в - ав^3 - 2а^2в^2.$ К обеим частям прибавим $2ав + а^2 + в^2,$ получим
$2а+2в+1+2ав + а^2 + в^2 = -а^3в - ав^3 - 2а^2в^2+ 2ав + а^2 + в^2.$
Применим формулы сокращенного умножения (1) и новую формулу квадрат суммы трех слагаемых, получим: $\mathbf{(a + b+ 1)^2 =(a + b)^2- ав (a + b)^2 (*),}$
$\mathbf{(a + b+ 1)^2 =(a + b)^2(1 - ав).}$ Отсюда $\mathbf{1 - ав = (}\frac{a+b+1}{a+b}\mathbf{)^2.}$ Заметим, что $а+в\neq0,$ ибо в противном случае $1=0$ (см равенство (*).
Значит, $\mathbf{1 - ав = (}\frac{a+b+1}{a+b}\mathbf{)^2}$ **,** если по условию числа а и в рациональные, то $\frac{a+b+1}{a+b}$ - рациональное число, утверждение задачи доказано.

Два способа решения, предложенные в материалах олимпиады:
1. Умножим данное равенство на ав и преобразуем:
$а^2в^2(а+в)^2 +2ав(а+в)+ ав =0,$ отсюда, прибавляя 1 к обеим частям и перенесся ав в правую часть, получим: $\mathbf{1-ав = (ав(а+в) + 1)^2}.$
Из последнего равенства следует утверждение задачи.
2. Преобразуем исходное равенство : $ав(а+в)^2 +2(а+в)+ 1 =0,$
$(ав-1)(а+в)^2 +(а+в)^2 +2(а+в)+ 1 =0,$ $(ав-1)(а+в)^2 +(а+в+1)^2 =0,$ так как $а+в\neq0,$ то имеет место равенство $\mathbf{1 - ав = (}\frac{a+b+1}{a+b}\mathbf{)^2,}$ что и требовалось доказать.

Задача. Точный квадрат. ([13])
Докажите, что число$1994*1995*1996*1998*1999*2000+36$ является квадратом натурального числа.

Решение. Используем ранее доказанное тождество (новую формулу):
(п-3) (п-2)(п-1) (п+1)(п+2) (п+3) +36 = п^2 (п^2 -7)^2 для п>3.
Применив его при решении , получим , что число в условии задачи равно
1997^2*(1997^2- 7)^2, т.е. является квадратом натурального числа, что и требовалось доказать.

Предлагаем аналогичную задачу:

Задача.

Докажите, что число2008*2009*2010*2012*2013*2014+36 является квадратом натурального числа.

Задача легко решается по формуле**: (п-3) (п-2)(п-1) (п+1)(п+2) (п+3) +36 = п^2 (п^2 -7)^2,** причем п = 2011.

Задача. (**[21]**)В статье И Петракова «Особые приемы решения уравнений»**,** газета «Математика» №3/95,с. 6, подобраны интересные сложные задачи, решать которые помогают новые формулы, отмеченные в данной работе, задачи №15- №21:

№15. Решить систему $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x+y=3. \end{cases}$

Указание. Используя формулу: **a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a ^{2}b^2,** преобразуем систему к виду

$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = 17, \\ (x^2+y^2) + 2xy = 9. \end{cases}$

Данная система легко решается методом введения новых переменных $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, где $u \geq 0$.

№19. Решить систему $\begin{cases} x^6 - y^6 = 665, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$

Решение. Формула из заключительной таблицы данной работы:
a^6- в^6=(a-в) (a+в)(a^4+a^{2}в^2+в^4) позволяет первое уравнение системы представить в виде:
$(x^2 - y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=665$; $(x^2 - y^2) \cdot 133=665$; $x^2 - y^2=5$.
Второе уравнение можно привести к виду: $(x^2 - y^2)^2 + 3x^2y^2 = 133$, выполнив преобразования: $x^4+x^2y^2+y^4= x^4 - 2x^2y^2+y^4+ 3x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 + 3x^2y^2$.
Имеем: $\begin{cases} x^2 - y^2=5, \\ 25 + 3x^2y^2=133. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + (-y^2)=5, \\ x^2 (-y^2)= -36. \end{cases}$ Числа x^2 и $(-y^2)$ являются корнями квадратного уравнения: $a^2-5a-36=0$.
Ответ: (3,2), (3,- 2), (- 3,2), (-3,- 2).

№20.Найти действительные решения уравнения
$3(x^2+y^2+z^2) =2(xy + yz + zx) +16z - 56 +8y$.
Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть и раскроем скобки. Заметим, что 56= 4+16+36 (квадраты чисел,2,4 и 6) , есть также квадраты чисел x,y и z, и всевозможные удвоенные произведения. Применим формулу квадрат суммы четырех слагаемых:
(a + b+ c+d)^2 = a^2 + b^2+c^2+d^2 + 2ab+2ac+2bc+ 2ad + 2b d +2cd.
$(x+y- z -2)^2 + (x -y + z -4)^2+(x - y - z +6)^2=0$
Так x,y, z= действительные числа , то данное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} x+y- z -2=0; \\ x -y + z -4=0; \\ x - y - z +6=0 \end{cases}$

Откуда x=3, y=4; z=5

Задача

№21.Решить систему:

$\begin{cases} x^2+y^2+z =8; \\ \\ \end{cases}$

x +y + z^2 =12;
x y+ y z +xz =11., где x,y, z- целые числа.
Решение: Умножим третье уравнение на 2 и сложим все уравнения почленно, получим уравнение $(x+y+z)^2+(x+y+z)-42=0$. Отсюда найдем, что x +y + z = -7, x +y + z = 6.
Из второго уравнения системы и последних двух уравнений найдем z, а затем, используя третье уравнение системы, найдем x и y. Ответ: (2;1;3) , (1;2;3).
Задача([7]). При каких значениях a система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+y^2+1}+\sqrt{x^2-2ay+a2+y^2}=\sqrt{1+a^2}, \\ |y| = |x |+ 1 + | |y| - |x | - 1 | \end{cases}$$

имеет более одного решения? Решение. В первом уравнении системы, применив формулу (2) сокращенного умножения, и формулу расстояния между точками (из геометрии), получили, что сумма расстояний AB + BC равна расстоянию AC. А это значит, что точки A(1,0), B(x,y) и C(0 ,a) лежат на одной прямой. Уравнение этой прямой y = -ax+a. Не составило труда построить график второго уравнения и определить, при каких значениях a, прямая y = -ax+a пересекает область решений второго уравнения более чем в одной точке. Ответ: a≥1, a≤-1

4. Заключение.

В ходе проведения исследования я узнала, что существуют другие, незнакомые формулы сокращенного умножения, которые можно применить при упрощении выражений, разложении на множители, решении уравнений, ответила на вопрос: «Как получить новые формулы, используя уже изученные в школьном курсе формулы сокращенного умножения?».

Проанализировав известные формулы, определила направления исследования с целью получения новых незнакомых для учащихся формул сокращенного умножения. Рассмотрено шесть направлений поиска новых формул, полезных при решении задач повышенной сложности, найдены новые формулы, с помощью которых решены многие трудные олимпиадные задачи. Исследование показало, что данная тема объемная, практически во всех разделах школьной математики применяются формулы сокращенного умножения: «Многочлены», «Корень п-й степени», «Преобразование рациональных и иррациональных выражений», «Преобразование тригонометрических выражений», «Решение уравнений, систем уравнений, неравенств».

Выводы: Упражнения из задачника **[11]**, решение которых вызвало затруднение у учащихся, проанализированы, решены, из известных фактов выведены новые знания, новые формулы. Показано их применение при решении задач из различных источников; есть задачи, составленные автором работы; удалось посмотреть на изученные формулы с разных точек зрения, изучить литературу, материалы Интернета. В результате исследования выведены новые формулы, составлена справочная таблица, заполнена таблица для нахождения чисел x и y в формуле: $(1+\sqrt{2})^n = x+y\sqrt{2}$.

На примере решения задач автор показал, как новые формулы и навыки видеть возможные неизвестные формулы помогают при решении сложных задач. Цель работы реализована, задачи решены.

Надо отметить: данная работа привлекает внимание к известным формулам сокращенного умножения, подобраны упражнения, которые практически невозможно решить без применения новых знаний. Таким образом, целая серия новых сложных развивающих задач стала доступна учащимся. Новые формулы оформлены в справочную таблицу, с которой имели возможность познакомиться ученики 8 -11 классов школы. Принимая участие в заочной математической олимпиаде «Атомных станций», которую проводила московская школа «Авангард» в ноябре 2011года для 9 классов, учениками была решена сложная задача №5**([7])**, в нестандартной ситуации применение формул сокращенного умножения привело к результату. Формулы школьного курса следует знать наизусть, так как они применяются практически во всех разделах математики. Новые же формулы достаточно применять при решении задач. Тема исследования оказалась настолько увлекательной, что изучая литературу, решая трудные задачи, создавала все новые и новые формулы.

Вот некоторые из них(**[5], с.136, с132**):

$x^3+y^3+z^3 - 3\,xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2)$.
$(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2+ b^2)(c^2+d^2)$
$(x+y)(y+z) = (x+y+z)y + x z$.

Задача № 2.5 повышенного уровня, дает новую формулу ((**[11]**)):

$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z)$.

«Сборник задач по алгебре для 8-9 классов» (**[2]**), с.7-9.

Если $a+в+c=2p$, то $4в^2c^2 - (в^2+c^2-a^2)^2=16p(p-a)(p-в)(p-c)$

Применение формул сокращенного умножение часто встречается в решении

упражнений «Сборника задач по математике для поступающих» Сканави М.И.(**[17]**) с. 13-15. В сборнике подготовки к ЕГЭ **2012г.** Рязановского А.Р. (**[15]**) есть целый раздел, посвященный формулам сокращенного умножения. Это подтверждает актуальность данной темы для учащихся 11 класса, личную заинтересованность автора работы.

Исследования по данной теме можно продолжить. Следует отметить, что формулы сокращенного умножения – это крайне универсальный инструмент отображения данных. Какие бы открытия ни делались в современное время, все они могут быть описаны с помощью формул. Не будет преувеличением сказать, что и спустя несколько десятков, а то и сотен лет, формулы не потеряют своей актуальности. Возможно всего лишь их видоизменение, но никак не полный отказ от подобных условных обозначений. В математике регулярно используются более 300 основных формул. В общем и целом, формулы позволили ученым перейти от абстрактных рассуждений к максимально точному и подробному описательному процессу всех явлений, происходящих в нашем мире, что позволит человечеству добиваться новых свершений и постоянно двигаться вперед.

Результат работы: брошюра: справочная таблица формул.

Таблица 2. Памятка продвинутого девятиклассника: ФСУ вне школьной программы.

№ п/п	Формула
1	$a^2 + в^2=(a+в)^2-2ав$
2	$(a - в)^2=(a+в)^2-4ав$
3	$a^3 + b^3= (a + b)^3 - 3ab(a + b),$
4	$a^3 - b^3 =(a - b)^3 + 3ab(a - b).$
5	$a^3 + b^3= (a + b)((a + b)^2 - 3ab),$
6	$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$
7	$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$
8	$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
9	$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2,$
10	$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b+ a^2b^2 -ab^3 + b^4)$
11	$a^6- в^6=(a-в)(a+в)(a^4+a^2в^2+в^4) =(a-в)(a+в)(a^2+ав+в^2)(a^2 - ав+в^2).$
12	$a^6+в^6 =(a^2+в^2)(a^4- a^2в^2+в^4).$
13	$a^6 - b^6= (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
14	$a^n -b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2 +…+ a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+ b^{n-1})$, где $n \in N$
15	$a^{2n}-b^{2n}=(a +b)(a^{2n-1}-a^{2n-2}b+a^{2n-3}b^2-…- a^2b^{2n-3}+ab^{2n-2}-b^{2n-1})$, $n \in N$
16	$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2 -…+ a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n})$, $n \in N$
17	$(10п +5)^2 = п(п+1)*100 +25,$ например $35^2= 3*4*100+25=1225$
18	$(10^п+1)^2= 10^{2п}+2*10^п+1$
19	$(10^п - 1)^2= 10^{2п} - 2*10^п+1$
20	$(x+a)^6= x^6 +6 a x^5+15 a^2 x^4+20 a^3 x^3+15 a^4x^2 +6 a^5 x+a^6.$
21	$(a+b)^8= a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$
22	$(a + b+ c)^2 = a^2 + b^2+c^2 + 2ab+2ac+2bc.$
23	$(a + b+ c+d)^2 = a^2 + b^2+c^2+d^2 + 2ab+2ac+2bc+ 2ad + 2b d +2cd.$
24	$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$
25	$(x^2-1+x)(x^2-1+3x) +x^2= (x^2 - 1+2x)^2$
26	$(x^2+2x - 1)^2=(x^2-1+x)(x^2-1+3x) +x^2$
27	Если выполняется равенство $a^3в +ав^3 + 2a^2в^2+ 2a+2в+1=0$, то $(a + b+ 1)^2 =(a + b)^2(1 - ав),$ $1-ав = (ав(a+в) + 1)^2;$ $1 - ав = (\frac{a+b+1}{a+b})^2$
28	$(п-3) (п-2)(п-1)(п+1)(п+2)(п+3) +36 = п^2 (п^2 -7)^2.$
29	$a^4+a^2в^2+в^4= (a^2+ав+в^2)(a^2 - ав+в^2).$
30	$п^4+4=(п^2+2-2п)(п^2+2+2п)$
31	$a^4+4в^4= (a^2+2в^2 - 2ав)(a^2+2в^2 +2ав).$
32	$ав = (\frac{a+в}{2})^2 - (\frac{a-в}{2})^2.$
33	$(x+y+ z)^3 - x^3- y^3- z^3 = 3(x+y)(y+ z)(x+ z).$
34	$(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2+ b^2)(c^2+d^2)$

35	(x+y) (y+ z) = (x+y+ z)y + x z.
36	$(1+\sqrt{2})^n = x+y\sqrt{2}$ (см. таблицу 1), где n ϵ N

Достоверность формул подтверждается расчетами. В заключение необходимо отметить, что иногда формулы сокращенного умножения при решении задач применять не требуется. Ниже приведен пример.

Задача. Найти значение выражения $\frac{(8^{k+1}+8^k)^2}{(4^k-4^{k-1})^3}$ где $k \in N$.

$$\frac{(8^{k+1}+8^k)^2}{(4^k-4^{k-1})^3}=\frac{(8^k(8+1))^2}{(4^{k-1}(4-1))^3}=\frac{8^{2k}\cdot 9^2}{4^{3(k-1)}\cdot 3^3}=\frac{2^{6k}\cdot 3^4}{2^{6(k-1)}\cdot 3^3}=$$

$$=\frac{2^{6k}\cdot 3^4}{2^{6k}\cdot 2^{-6}\cdot 3^3}=\frac{3}{2^{-6}}=3\cdot 64=192.$$

Формулы квадрат суммы и куб разности в данной задаче применять не требуется, задача решается, используя свойства степени и вынесения общего множителя за скобки.

Есть притча: Хозяин, принимая работника на работу, спросил его:
- Что ты умеешь делать?
- Копать,- ответил работник.
-Что еще умеешь делать?
- Не копать!

Всегда предстоит, изучив условие задачи, решить: применять формулы сокращенного умножения или другие, предложенные в работе, формулы, или не применять. Данная работа привлекает внимание к формулам, которые помогут незнакомую задачу привести к знакомой и найти способ её решения.

Список использованной литературы:

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике, Москва, 2005
2. Галицкий М.Л и др. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учеб. пособие для учащихся школ. И классов с углубл. изучением математики/ М.Л. Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И Звавич. 2-е изд.- М.: Просвещение 1994.- 271с., с.7-8, с.53
3. Глейзер Г.И. История математики в школе 7-8 кл. Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 2003
4. Задачник «Кванта»: Математика. Часть 3./ Под ред. Н.Б.Васильева. – М.: Бюро Квантум, 1997, с 47-56
5. Математика в школе. Научно – методический журнал, № 6. М. – «Педагогика». 1989г, с. 136.

6. Материал из Википедии — свободной энциклопедии, тема: Формулы сокращённого умножения многочленов
7. Материалы заочной математической олимпиады «Атомных станций», московская школа «Авангард» 2011г.
8. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в 5-8 классах: пособие для учителя. – Львов, журнал «Квантор» №3, 1991год, с. 20-21
9. Михайленко Алевтина Николаевна, учитель математики «Формулы сокращенного умножения" Обобщающий урок . Материалы Фестиваля педагогических идей «Открытый урок»
10. Мордкович А.Г, Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. Часть 1. Учебник для учащихся 11 класса общеобразовательных учреждений (профильный уровень). – М.: Мнемозина, 2010 г. .
11. Мордкович А.Г. и др. Алгебра и начала анализа. Часть 2. Задачник для учащихся 11 класса общеобразовательных учреждений (профильный уровень). – М.: Мнемозина, 2010г.
12. Ожегов С.И., Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка.Российская академия наук. Институт русского языка им. В.В.Виноградова.- М.: Аэбуковник, 1999.
13. Произволов В. Задачи учат думать. Газета «Математика»№18,1997год, с.16
14. Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник. М.: Народное образование,2001. с. 272
15. Рязановский А.Р. ЕГЭ2012.Математика.Решение задач.Сдаем без проблем!/ А.Р. Рязановский, В.В.Мирошин.- М. :Эксмо, 2011.- 496с.-(ЕГЭ. Сдаем без проблем)
16. Савенков А.И.. Исследователь. Материалы для подростков по самостоятельной исследовательской практике.
17. «Сборника задач по математике для поступающих. Учеб. пособие/ В,К. Егерев , Б.А. Кордемский, В.В Зайцев и др. под редакцией Сканави М.И..- М.:«Столетие»1997г, с. 13-15.
18. Халамайзер А.Я Комбинаторика и бином Ньютона: Пособие для учащихся 9-10 кл.- М.: Просвещение, 1980.
19. Чуваков В.П. Квадратичная функция. Югорский физико-математический лицей. Учебно-методическое пособие. Ханты-Мансийск, 2008г, с.11
20. XXXV Всероссийская математическая олимпиады школьников. Региональный этап, 2009год.
21. «Математика» газета «Первое сентября», №3/95,с. 6, статья И. Петракова «Особые приемы решения уравнений».