ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ, ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКИХ И ТВОРЧЕСКИХ РАБОТ ОБУЧАЮЩИХСЯ

«НАУКА, ТВОРЧЕСТВО, ДУХОВНОСТЬ»

Направление: Математика

Тема: ФРАКТАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ. МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА. ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛОВ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ

Соискатель: Коджебаш-Зымба Сергей Сергеевич,
ученик 10 класса, Частное общеобразовательное
учреждение школа «Лексис»

Научный руководитель: Минаков Григорий Игоревич,
аспирант НИИ ФХП БГУ, аспирант БГУ,
учитель математики ЧОУ «Лексис»

Место выполнения работы: ЧОУ «Лексис»

2026

Содержание

Введение 3
1. История и основы понятия фрактала: развитие, открытия и определения 4
2. Основные свойства фракталов 7
2.1. Множество Мандельброта: определения и свойства 7
2.2. Кривая Коха: определения и свойства 8
2.3. Множества Жюлиа: определения и свойства. 9
3. Значение изучения фракталов для науки и технологий 11
3.1. Природные примеры фрактальных фигур 11
3.2. Применение фракталов в технике 12
4. Практическая часть исследовательского проекта 14
4.1. Методика эксперимента 14
4.1.1. Алгоритмы построения кривой Коха 14
4.1.2. Построение множества Мандельброта 16
4.1.3. Методика построения фрактального дерева 17
4.2. Результаты эксперимента 19
Заключение 21
Список литературы 22

Введение

Фракталы представляют собой уникальную и сложную категорию геометрических объектов, обладающих свойствами самоподобия, бесконечной детализации и масштабной независимости структуры. Объектом настоящего исследования является изучение фрактальных структур и механизмов их построения, особенно в контексте применения данных знаний в природных явлениях и технических системах. В качестве ключевого элемента данного анализа рассматривается множество Мандельброта, кривая Коха и множества Жюлиа – одного из наиболее ярких и фундаментальных примеров фрактальной геометрии, чьи свойства нашли широкое применение в различных научных и инженерных областях.

Гипотеза исследования основывается на предположении, что использование современных компьютерных программ существенно расширяет возможности для моделирования и визуализации сложных фрактальных структур, а также способствует более глубокому пониманию их свойств и закономерностей. В частности, предполагается, что компьютерные методы позволяют не только эффективно строить классические фракталы, такие как множество Мандельброта и Жюлиа, но и создавать новые варианты и модификации, что открывает дополнительные перспективы для практического применения в науке и технике.

Научно-практическая значимость данного исследования заключается в разработке и внедрении алгоритмов и программных средств для построения фракталов, что способствует дальнейшему развитию теоретических основ фрактальной геометрии и их практического использования. В числе прикладных направлений – моделирование природных форм и процессов (например, структуры горных пород, рельефа, растительности), создание компьютерной графики и анимации, а также разработка инновационных инженерных решений на базе фрактальных структур.

В рамках реализации проекта была подготовлена научная статья на тему «Современные направления исследований в области фрактальной геометрии», которая получила высокую оценку на Всероссийской конференции научных работ и была удостоена диплома первой степени. Данная статья также была опубликована в международном сборнике научных трудов, что служит подтверждением актуальности и высоких научных стандартов представленных исследований. Эта работа стала важным вкладом в развитие современного фрактального анализа и их практического применения, а также послужила стимулом для дальнейших исследований в выбранной области.

1. История и основы понятия фрактала: развитие, открытия и определения

Фрактал – это математический объект, обладающий свойством самоподобия, то есть его структура повторяется на разных масштабах [1]. Концепт самоподобия означает, что некоторые или все части фрактала имеют сходство с целым объектом, причём количество таких повторяющихся элементов может стремиться к бесконечности. Эта особенность отличает фракталы от классических самоподобных геометрических фигур с конечным числом повторений, которые называют предфракталами.

Термин «фрактал» происходит от латинского слова «fractus», что означает «дроблёный» или «сломанный». В математике фракталы рассматриваются как множества точек в евклидовом пространстве, обладающие дробной или несвойственной топологической метрической размерностью – так называемой размерностью Минковского или Хаусдорфа. В отличие от обычных фигур, ограниченных конечным числом звеньев, фракталы характеризуются сложной структурой, которая сохраняет сходство на любом масштабе [1].

Термин «фрактал» был введён выдающимся ученым Бенуа Мандельбротом (Benoît B. Mandelbrot) в 1970-х годах (рис 1.1.).

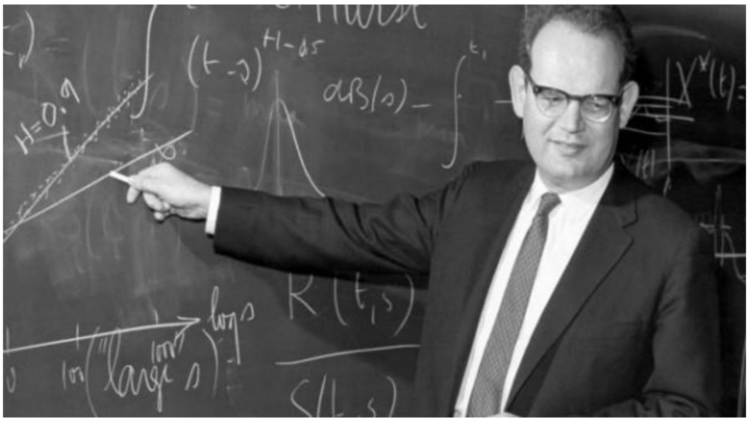


Рисунок 1.1 – Документальное фото Бенуа Мандельброта

Математическая база для развития теории фракталов была заложена еще задолго до Мандельброта, однако лишь с появлением современных вычислительных технологий она получила широкое развитие и практическое применение. Первоначально Бенуа Мандельброт работал в исследовательском центре компании IBM, где занимался проблемами передачи данных на большие расстояния. В процессе исследований он столкнулся с проблемой значительных потерь сигнала из-за шумовых помех. Его задачей было предсказать возникновение этих шумов в электронных цепях, особенно в условиях, когда обычные статистические методы оказывались бесполезными.

Изучая графики шума, Мандельброт заметил интересную закономерность: графики шумов, записанные в разных масштабах, имели сходный вид. Независимо от того, рассматривалась ли карта за один час, за неделю или за месяц, при изменении масштаба структура изображения повторялась. Эта наблюдаемая самоподобность вызвала у него вдохновение и подтолкнула к формированию теории фракталов [1].

Бенуа Мандельброт часто отмечал, что он не занимается созданием сложных формул, а скорее экспериментирует с изображениями. Он мыслил весьма образно и всякую алгебраическую задачу предпочитал переводить в геометрическую форму. По его словам, именно в области визуализации и геометрии зачастую можно найти наиболее очевидные и интуитивно понятные ответы.

Это неудивительно, что именно человек с богатым пространственным воображением стал основателем фрактальной геометрии. Осознание концепции фракталов зачастую приходит в тот момент, когда начинаешь наблюдать за изображениями и вдумываться в смысл их сложных узоров и спиральных структур.

Фрактальный рисунок характеризуется отсутствием повторяющихся элементов в точном виде, но при этом обладает свойством самоподобия – то есть отдельные его участки в любом масштабе сохраняют сходство с всей фигурой. Создать такие изображения вручную с высокой степенью детализации было бы практически невозможно, так как для этого требовалось огромное количество вычислительных ресурсов.

Значимые предварительные исследования в области многообразий подобных структур были проведены еще более чем за семьдесят лет до работ Мандельброта. Например, французский математик Пьер Жозе Луи Фату описал множество, которое впоследствии получило название «множество Фату», задолго до формулировки теории фракталов. В исторической перспективе идеи о самоподобии фигур уходят корнями в труды таких ученых, как Лейбниц и Георг Кантор, которые ранее рассматривали свойства несамостоятельных структур и множеств с необычной размерностью [2].

Одним из первых известных визуальных образов фрактала стала графическая интерпретация множества Мандельброта, которое возникло благодаря исследованиям Гастона Мориса Жюлиа. Именно эти исследования заложили основу для более глубокого понимания и визуализации сложных структур, обладающих свойством самоподобия и дробной измеряемости [2].

Фрактальный рисунок не имеет идентичных элементов, но обладает подобностью в любом масштабе. Построить такое изображение с высокой степенью детализации вручную ранее было просто невозможно, на это требовалось огромное количество вычислений. Например, французский математик Пьер Жозе Луи Фату (Pierre Joseph Louis Fatou) описал это множество более чем за семьдесят лет до открытия Бенуа Мандельбротом. Если же говорить про принципы самоподобия, то о них упоминалось еще в трудах Лейбница и Георга Кантора.

Один из первых рисунков фрактала был графической интерпретацией множества Мандельброта, которое родилось благодаря исследованиям Гастона Мориса Жюлиа (Gaston Maurice Julia).

На рисунке 1.2 представлена иллюстрация масштабной инвариантности фрактала «Решето Серпинского», демонстрирующая его свойства при различных масштабах [12]. Самоподобие может быть как полным, так и частичным или изменяющимся закономерно – это обусловлено высокой степенью сложности внутренней структуры фрактальных объектов.

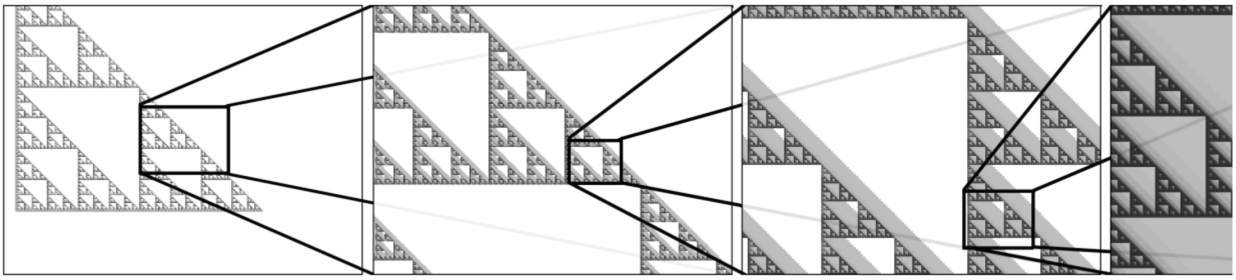


Рисунок 1.2 – Решето Серпинского [12]

В качестве иллюстрации принципа самоподобия также приводятся фрагменты классического фрактала – Множества Мандельброта (рис. 1.3). На данном примере видно, что при различных масштабах сохраняется объединение индивидуальных характеристик элементов и общих черт системы, что свидетельствует о сложной и иерархической природе фрактальных структур.

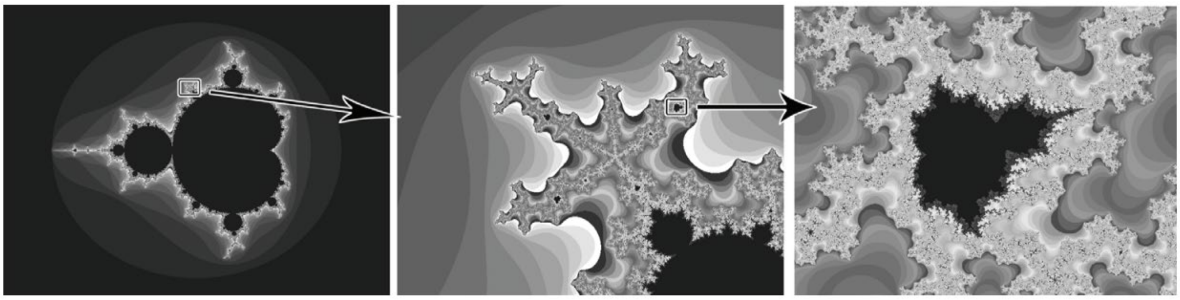


Рисунок 1.3 – Фрактал Мандельброта

Современные исследования в сфере фрактальной геометрии сосредоточены на разработке методов анализа многомерных и мультифрактальных структур, что расширяет возможности моделирования неоднородных и разнородных систем, проявляющих вариативность их фрактальных характеристик на различных масштабных уровнях [13]. В рамках данных направлений поставлены задачи по формализации методов оценки мультифрактальных спектров и сеточных функций, что позволило повысить точность количественного анализа характеристик биологических тканей, геологических образований, а также сложных процессов в природе и технике.

2. Основные свойства фракталов

2.1. Множество Мандельброта: определения и свойства

В 1905 году французский математик Пьер Жозе Луи Фату рассмотрел и описал множество, ныне известное как множество Фату. Данное множество является одним из ранних примеров объектов, обладающих свойствами самоподобия и дробной размерности. Однако широкое развитие теории фракталов и их моделирование с помощью современных вычислительных средств произошло лишь в 1970-х годах, когда Бенуа Мандельброт впервые осуществил численное моделирование множества Фату на компьютере. Его работы стали важным прорывом в области комплексных множеств и служат фундаментом для формирования современной теории фрактальной геометрии [3].

В основе такого множества лежит формула:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C,$$

где Z и C – комплексные числа.

Рассмотрим понятие комплексных чисел [4]. В традиционной арифметике известно, что извлечение квадратного корня из отрицательного числа невозможно в сфере действительных чисел, поскольку квадраты всех действительных чисел являются неотрицательными. Эта аксиома справедлива в рамках действительной числовой системы, которая включает целые, рациональные и иррациональные числа, такие как 1, 0, -56,7, 1/3, 5/6 и другие.

Однако расширение числовой системы до комплекса позволяет вводить понятие мнимой единицы, обозначаемой как i, где i – мнимая единица, удовлетворяющая равенству $i^2 = -1$. Таким образом, любой комплексное число можно записать в виде $a + bi$, где a и b – вещественные числа. Введение мнимой единицы кардинально изменяет свойства арифметической операции и позволяет формализовать решение уравнений, ранее считавшихся неразрешимыми в рамках действительных чисел, например, уравнений вида $x^2 + 1 = 0$.

Использование комплексных чисел впервые активно применялось в XVI веке для нахождения решений кубических уравнений, где классические методы не давали полного решения. В последующие века комплексные числа нашли широкое применение в различных областях математики и физики, включая тригонометрию, теорию сигналов и квантовую механику, подтверждая свою важность и универсальность в научном анализе.

Концептуальная основа фрактала Мандельброта аналогична общепринятому принципу итеративных процессов, характерных для класса самоподобных структур. В частности, при построении множества Мандельброта каждая новая итерация основывается на значениях функции, полученных на предыдущем шаге, что обеспечивает развитие сложной структуры из простых правил [3].

Визуализация множества Мандельброта демонстрирует уникальную характеристику – при сближении к любым точкам границы множества на экране наблюдается возникновение всё новых и более усложнённых узоров. Эти узоры повторяют общие элементы начальной формы, создавая эффект бесконечной сложности и самоподобия. В результате, детали структуры становятся все мельче, а наблюдение и анализ таких фрактальных образов позволяет бесконечно углубляться в понимание их внутренней организации.

Подобные свойства делает изучение множества Мандельброта особенно привлекательным для исследования в рамках теории динамических систем, хаоса и нелинейных процессов. Ниже приводится пример (рис. 2.1.) визуализации, где произведено приближение к одной из точек границы множества Мандельброта, иллюстрирующее бесконечную глубину и сложность изучаемых структур.

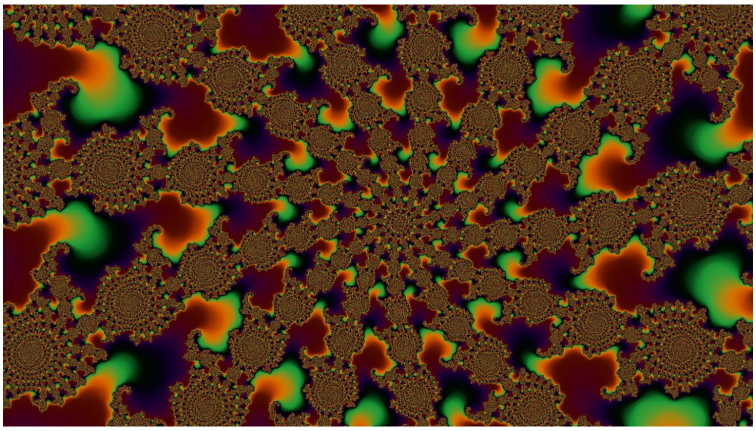


Рисунок 2.1 – Приближение к одной из точек границы множества Мандельброта, иллюстрирующее бесконечную глубину и сложность изучаемых структур

Значение множества Мандельброта выходит далеко за пределы эстетического восприятия. В области теории хаоса, динамических систем и нелинейной математики оно служит примером простого уравнения, порождающего чрезвычайно сложные и непредсказуемые поведения. Оно также применимо в моделировании процессов в физике, биологии и компьютерной графике, где подобные структуры встречаются в природе и искусственных моделях.

Таким образом, фрактал Мандельброта не только является важным объектом исследования в теории фрактальных множеств, но и служит мощным инструментом для понимания сложных динамических процессов. Его изучение способствует развитию математического аппарата, расширяет наши представления о структуре пространства и служит мостом между визуальной эстетикой и строгой теоретической наукой [3].

2.2. Кривая Коха: определения и свойства

Кривая Коха – один из ключевых примеров геометрического фрактала, впервые введённый шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году. Кривая представляет собой самоподобную линию, которая строится посредством итеративного процесса: исходный отрезок делится на три равные части, затем средняя часть заменяется равносторонним треугольником без основания [5]. Этот алгоритм повторяется для каждой полученной части на каждом шаге, в результате чего формируется сложная кривая, обладающая свойством бесконечной детализации при конечной длине исходного сегмента.

На основе кривой Коха возникает классический фрактальный объект – снежинка Коха (рис 2.2.). Она образуется путём построения трёх копий кривой, каждая из которых размещается на сторонах равностороннего треугольника, образуя замкнутую фигуру с многочисленными изломами. Эта структура демонстрирует ключевые свойства фракталов: самоподобие, бесконечно сложную кривизну и свойства, связанные с их измерениями. В частности, кривая обладает бесконечной длиной, несмотря на конечную площадь, ограниченную данной фигурой. Расчёты показывают, что объем пространства, занимаемый фигурой, остаётся конечным, несмотря на бесконечную длину её границ [5].

Важно отметить, что кривая Коха является примером кривой без касательных в любой точке, что было выделено в исследованиях Карлом Вейерштрассом в 1872 году [6]. Эта характеристика означает, что в любой точке кривой невозможно провести хорошо определённую касательную, что подчеркивает её сложную и необычную структуру в рамках традиционной дифференциальной геометрии. Свойство бесконечной длины при конечной области ограничивает использование некоторых аналитических и геометрических параметров, таких как краевой индекс, который, в случае снежинки Коха, становится неинформативным.

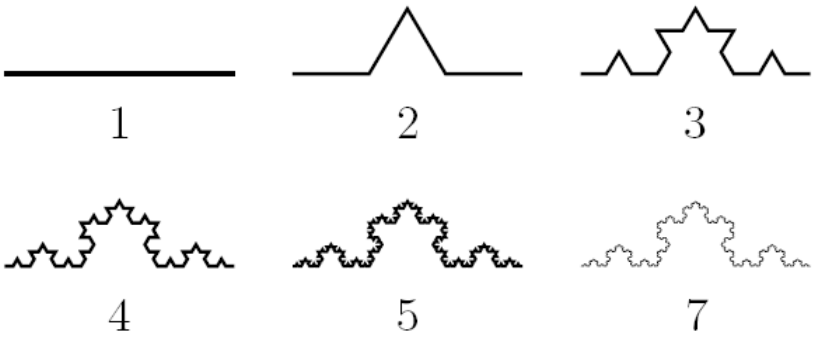


Рисунок 2.2 – Первые этапы построения кривой Коха

Рисунок 2.2 отлично показывает, как по шагам строится кривая Коха. Первая итерация – просто начальный отрезок. Потом он делится на три равные части, центральная достраивается до правильного треугольника и затем выкидывается. Получается вторая итерация – ломаная линия, состоящая из четырех отрезков. К каждому из них применяется такая же операция, и получается четвертый шаг построения. Продолжая в том же духе, можно получать всё новые и новые линии (все они будут ломаными). А то, что получится в пределе (это уже будет воображаемый объект), и называется кривой Коха.

Фрактальная размерность кривой Коха приблизительно равна 1,2619, что подтверждает её самоподобные свойства и слабо выраженную гладкость. Кроме того, существует вариация – так называемая антиснежинка Коха, для построения которой из исходной фигуры вырезаются внутренние треугольники на каждом шаге, что приводит к разреженной структуре с множеством несвязанных областей, суммарная площадь которых составляет примерно 40 % от площади первоначального треугольника.

Таким образом, кривая и снежинка Коха являются фундаментальными объектами в теории фракталов. Они демонстрируют основные свойства самоподобия, бесконечной длины и сложности структуры, что делает их важными моделями для изучения хаотических и нелинейных систем, а также для разработки новых методов анализа сложных геометрических образований в различных областях науки и техники.

2.3. Множества Жюлиа: определения и свойства

Множества Жюлиа и факториальные множества являются важными концепциями в теории комплексных динамических систем и теории бесконечно малых чисел. Они служат мощными инструментами для исследования поведения итеративных процессов и аналитических функций в комплексной области.

Множество Жюлиа – это набор точек комплексной плоскости, которые характеризуются стабильностью поведения при действии итеративных функций, таких как функцию квадратичного типа $f(z) = z^2 + c$ и напоминает фрактал Мандельброта, но имеет некоторое математическое отличие, что влияет на конечный результат, где (c) – комплексное число [7]. Концепция множества Жюлиа связана с динамическим развитием точек под многократным применением данной функции: для каждой точки определяется её орбита – последовательность значений при итерациях. Множество Жюлиа включает все те точки, для которых орбита остается ограниченной при бесконечных итерациях. Визуализация этого множества показывает сложную фрактальную структуру, обладающую свойствами самоподобия и бесконечной детализации. Множество Жюлиа (рис. 2.3.) делит комплексную плоскость на две кардинально разные части: связанную и разорванную – в зависимости от поведения динамик. Связанное множество соответствует случаям, при которых орбита точки остаётся ограниченной, а разорванные – точкам с растущими значениями при итерациях.

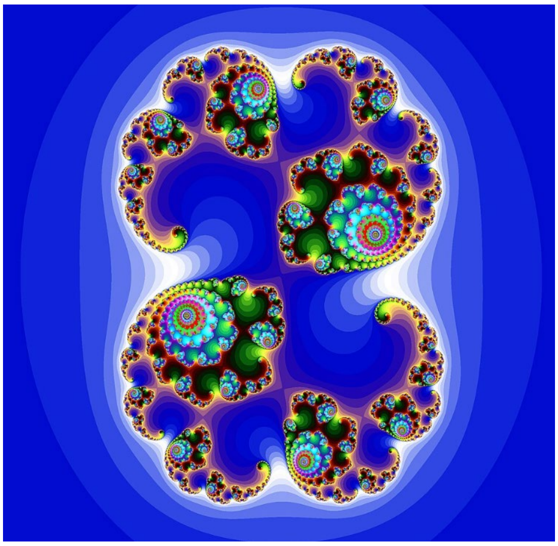


Рисунок 2.3 – Окрестности множество Жюлиа. Чем ярче точка, тем ближе она к множеству Жюлиа и тем больше итераций ей нужно, чтобы уйти от нуля на заданное большое расстояние

Множество Жюлиа демонстрирует сложную фрактальную структуру, тесно связанную с динамикой нелинейных функций, тогда как множества, связанные с факториальными функциями, лежат в основе оценки роста последовательностей и имеют важное значение в теории чисел и аналитической теории функций. В дальнейшем исследовании эти множества служат фундаментальной основой для развития теоретической и прикладной математики, расширяя понимание о сложных структурах в аналитических пространствах и динамических системах.

Множество Мандельброта играет роль «карты» для множеств Жюлиа. Каждый параметр c в уравнении $f_c(z)$ соответствует определённому множеству Жюлиа [8]. При этом:

– если c принадлежит множеству Мандельброта, то соответствующее множество Жюлиа связано.

– если c находится вне множества Мандельброта, множество Жюлиа оказывается несвязным, представляя собой «пылинку».

3. Значение изучения фракталов для науки и технологий

Многие природные и искусственные объекты обладают важным общим свойством – самоподобием или фрактальностью. Это означает, что структура таких объектов повторяется на разных масштабах, то есть меньшие части напоминают целое. Такое явление наблюдается во многих сферах природы и техники, что делает тему фракталов особенно актуальной и многогранной. В качестве примеров природных объектов можно привести ветви деревьев, кровеносные сосуды, береговые линии и русла рек, а также облака и снежинки. В каждом случае структура повторяет саму себя, лишь на меньших или больших масштабах.

Современная теория фракталов нашла широкое применение во многих областях науки и техники. В области графики и компьютерного моделирования свойства фракталов используют для сжатия изображений, создания реалистичных сцен, имитирующих природу – например, гор, облаков и деревьев. В физике и географии фрактальные модели помогают описывать сложные поверхности и формы рельефа, береговые линии, снежинки, облака, а также поверхности водоемов. В радиотехнике создаются фрактальные антенны, которые обладают высокой эффективностью при компактных размерах, что важно для беспроводных устройств. В экономике анализ нелинейных, сложных колебаний энергетического и фондового рынка также базируется на фрактальной геометрии, поскольку поведение финансовых инструментов часто демонстрирует свойства самоподобия и долгосрочной корреляции. В науке о данных моделируются фрактальные случайные процессы, что позволяет лучше понять природные и социальные явления.

3.1. Природные примеры фрактальных фигур

Общее понятие фрактала впервые было введено французским математиком Бенуа Мандельбротом, который использовал этот термин для описания структур, обладающих свойством бесконечной самоподобности и сложной бесконечной градацией детализации. История исследования этой темы связана с экспериментами и наблюдениями, сделанными в XIX веке, особенно в ходе изучения береговых линий. В частности, ученый Льюис Ричардсон изучал измерения длины береговой линии и обнаружил парадокс, который получил название «эффект Ричардсона». Суть его заключалась в том, что при увеличении точности измерения длины береговой линии она становилась все более длинной, поскольку исчезали все мельчайшие изгибы и выступы. В результате, при бесконечном увеличении масштаба, длина линии стремится к бесконечности, что является характерным признаком фрактальных структур [9].

Объекты окружающего мира – яркий пример фрактальной структуры. Например, ветви дерева и его ствол повторяют форму друг друга, что подтверждается наблюдениями – каждая ветка обладает подобной формой и структурой, как и всё дерево в целом. Аналогично в биологии – кровеносная система и нервные сети обладают ветвящейся структурой, которая обеспечивает эффективное распределение крови, нервных импульсов и питательных веществ. Такой распределенный узел – это пример природы, использованный миллионы лет назад для оптимизации процессов живых организмов. Еще одним ярким примером служит капуста Романеско (рис. 3.1), у которой каждая «ветка» – это миниатюрная копия всей конструкции, символизируя принцип фрактальной самоподобности.

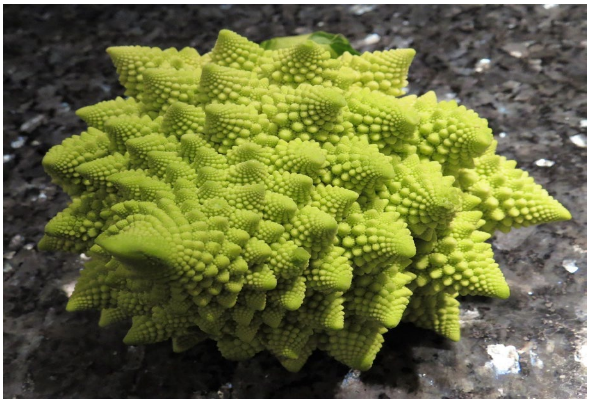


Рисунок 3.1 – Романеско – овощная культура, один из культурных сортотипов вида Капуста огородная

Географические объекты также демонстрируют свойства фракталов. Береговые линии, русла рек, горные хребты – все они обладают статистической самоподобностью, что означает, что при увеличении масштаба проявляются новые детали и искривления. Измерения показывают, что чем тщательнее измеряют берег, тем длиннее получается его линия, поскольку выявляются мельчайшие изгибы и изгибы. Однако, в силу физических ограничений и конечной точности измерений, эта длина не может стать бесконечной, что является границей применения математической модели [9].

Облака, снежинки, молнии – их структура также фрактальна. Каждая снежинка уникальна, но при этом формируется по определенным симметричным правилам, аналогично облакам, которые приобретают сложные формы. Космическое пространство и крупномасштабные распределения галактик тоже обладают фрактальной организацией. Исследования показывают, что структура Вселенной на определенных масштабах может следовать фрактальным закономерностям, что помогает лучше понять ее организацию.

3.2. Применение фракталов в технике

Фракталы – это сложные геометрические структуры, которые характеризуются самоопределением и свойствами бесконечной детализации, что делает их уникальными и широко применяемыми в различных областях науки, техники и искусства. В природе и науке фракталы позволяют описывать и моделировать сложные процессы, такие как диффузия, турбулентность, фазовые переходы, формирование горных пород и растительных структур, а также характеристики множества природных объектов. Благодаря своей сложной структуре, являющейся результатом простых правил построения, фракталы служат мощным инструментом в теории хаоса, где они помогают визуализировать и анализировать хаотические системы через фрактальные аттракторы и измерения фрактальной размерности, которая характеризует степень сложности и детализации этих объектов. В физике движение частиц, распространение волн и теплопередача часто обладают фрактальной природой, что делает изучение и использование фрактальных моделей важнейшими для понимания и предсказания различных процессов. В математике фракталы являются классическими объектами исследования, что способствует развитию новых методов анализа и моделирования сложных систем [10].

В современном радиоэлектронном приборостроении одна из наиболее ярких и практических областей применения фракталов – создание фрактальных антенн. Эти антенны заметно отличаются от традиционных благодаря своей самоподобной, многоуровневой и многополосной конструкции. Первые идеи о фрактальных антеннах возникли в середине 1980-х годов; в 1986 году Ким и

Джаггард предложили использовать концепции самоподобной геометрии для разработки компактных антенн с многополосным и широкополосным диапазоном работы [11]. Однако широкая публика и промышленное производство благодаря развитию технологий получили свое развитие после создания первой фрактальной антенны компанией Натан Коэна в 1988 году, которая была выполнена на основе кривой Коха. В 1995 году компания Fractal Antenna Systems Inc. начала коммерциализацию этих конструкций, произвели ряд серийных антенн, выгодно сочетавших миниатюрность, эффективность и наличие множества частотных диапазонов [11].

Из множества видов фрактальных антенн наиболее популярными являются монополь Серпинского, выполненный по схеме итеративного удаления центральных треугольников, что обеспечивает многодиапазонную работу. Эта антенна, благодаря своей самоподобной структуре, может работать на нескольких частотах одновременно, что делает её удобной для мобильных устройств, спутниковых систем и радиолюбительских устройств. Именно такое устройство часто используют в современных радарных и коммуникационных системах с повышенными требованиями по масштабируемости и эффективности. Другим примером является антенна на основе кривой Коха, которая за счет своей экстремально застройной границы обладает минимальной площадью при сохранении многополосных характеристик и высокой эффективности.

Преимущества фрактальных антенн заключаются не только в компактности и многополосности, но и в возможности создания антенн, которые при меньших размерах могут работать на более широком диапазоне частот. Это достигается за счет их структуры, которая увеличивает расстояние между элементами антенны без увеличения общего размера, а также за счет использования повторяющихся элементов, характерных для фракталов, что способствует повышению эффективности и стабилизации характеристик. Среди других интересных решений – антенны на основе набора Кантора, которые за счет разреженных структур могут обеспечивать очень широкий диапазон рабочих частот и хорошие параметры полосовой фильтрации.

Современные разработки по применению фракталов в антеннах включают использование сложных геометрических структур, таких как кривые Гильберта, Мандельброта, осколки кольца Коха, патчевые антенны, расположенные по фрактальной сетке, а также массива элементов, распределенных по фрактальным конфигурациям. Массивы, выполненные в виде ковров Серпинского или кольцевых построений, позволяют добиться многополосности, а также снизить габариты и повысить многофункциональность антенн для систем связи, передачи данных, радиолокации и навигации. Некоторые конструкции используют концепцию «заземленных» или «проницаемых» фрактальных элементов для повышения их электромагнитных характеристик и оптимизации работы в условиях многолучевого распространения.

В медицине фрактальные модели помогают при диагностике и моделировании внутренних систем организма, таких как сосудистая сеть или структура легких. В метеорологии – изучение форм облаков, процессов образования гроз и молний. В финансах и экономике – анализ ценовых колебаний и рыночных тенденций, поскольку рынки демонстрируют сложное, фрактальное поведение, что важно для принятия инвестиционных решений.

Таким образом, фрактальные структуры сегодня являются мощным техникотехническим средством, позволяющим создавать миниатюрные, эффективные и многополосные антенны и радиотехнические устройства, а также находят применение при проектировании новых материалов, устройств сбора энергии, препаратов для медицины и, в том числе, в области искусственного интеллекта, что подтверждает их универсальность и важность в современном технологическом прогрессе.

4. Практическая часть исследовательского проекта

4.1. Методика эксперимента

В данной части работы осуществляется практическая реализация основных классов классических фрактальных структур – множества Мандельброта, кривой Коха– с помощью программных средств. Использование языка Python выбрано за его универсальность, наличие мощных библиотек для научных вычислений и графической визуализации, а также за простоту понимания и реализации алгоритмов. Это позволяет не только создать статичные изображения, но и значительно расширить возможности моделирования, а также подготовить материалы для дальнейшего анализа и изучения фрактальных свойств.

Полученные изображения не только служат доказательством теоретических свойств фракталов, но и дают возможность исследовать их параметры, визуализировать процессы формирования и даже создавать анимации. Весь практический материал в дальнейшем может быть использован для проведения экспериментальных исследований и порождения новых интересных структур.

4.1.1. Алгоритмы построения кривой Коха

Кривая Коха – это классический пример фрактала, полученного итеративно (или рекурсивно) добавлением треугольных «зубцов» на каждой стороне. В рамках практической части работы был разработан и тщательно составлен программный код на языке Python, предназначенный для построения фрактальной кривой Коха. Реализация основывается на рекурсивной методике, которая позволяет детально моделировать процесс формирования этого классического фрактала, начиная с базовой линии и последовательно добавляя геометрические элементы на каждом шаге рекурсии.

Код (рис. 4.1) включает в себя функции, отвечающие за деление исходной линии на три равных сегмента, а также за построение равносторонних треугольников, выступающих наружу или внутрь. Такой подход обеспечивает создание сложных и объемных структур, характеризующихся высоким уровнем самоподобия и масштабируемости – основных свойств фракталов. В процессе разработки особое внимание уделялось оптимизации алгоритма, чтобы обеспечить высокую точность и гладкость конечных изображений, а также для возможной дальнейшей эксплуатации при генерации анимаций или масштабных демонстрационных материалов.

Для визуализации итогового изображения использовалась библиотека Matplotlib, что позволило получить яркую, наглядную и эстетически привлекательную иллюстрацию кривой Коха (рис. 4.1, рис. 4.2). В результате работы были созданы качественные графические материалы, подчеркивающие сложную структуру и бесконечно повторяющиеся узоры, сформированные посредством последовательных итераций. Таким образом, выполненная программная реализация не только демонстрирует теоретические свойства фракталов, но и служит практической платформой для дальнейших научных исследований, анализа и образовательных целей.

Можно сказать, что чем больше глубина рекурсии, тем сложнее рисунок и тем более детальный и «зубчатый» он становится. Для быстрого построения можно оптимизировать код с помощью специальных библиотек. Можно также экспериментировать с разными ориентациями и параметрами, чтобы получить вариации кривой.

```
Python 3.12.10 (tags/v3.12.10:0cc8128, Apr  8 2025, 12:21:36) [MSC v.1943 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> import turtle
>>>
>>> def koch_curve(t, length, depth):
...     """Рекурсивная функция для рисования кривой Коха"""
...     if depth == 0:
...         t.forward(length)
...     else:
...         length /= 3.0
...         koch_curve(t, length, depth-1)
...         t.left(60)
...         koch_curve(t, length, depth-1)
...         t.right(120)
...         koch_curve(t, length, depth-1)
...         t.left(60)
...         koch_curve(t, length, depth-1)
...
>>> def koch_snowflake(t, length, depth):
...     """Рисуем снежинку Коха (3 кривые Коха)"""
...     for _ in range(3):
...         koch_curve(t, length, depth)
...         t.right(120)
...
>>> # Настройка окна
>>> window = turtle.Screen()
>>> window.bgcolor("white")
>>> window.title("Снежинка Коха")
>>>
>>> # Создание черепашки
>>> pen = turtle.Turtle()
>>> pen.speed(0)  # максимальная скорость
>>> pen.color("blue")
>>> pen.penup()
>>> pen.goto(-150, 100)  # начальная позиция
>>> pen.pendown()
>>>
>>> # Рисуем снежинку
>>> depth = 4  # глубина рекурсии (можно изменить от 0 до 5-6)
>>> size = 300  # размер снежинки
>>>
>>> koch_snowflake(pen, size, depth)
```

Рисунок 4.1 – Программный код на языке Python, предназначенный для построения фрактальной кривой Коха

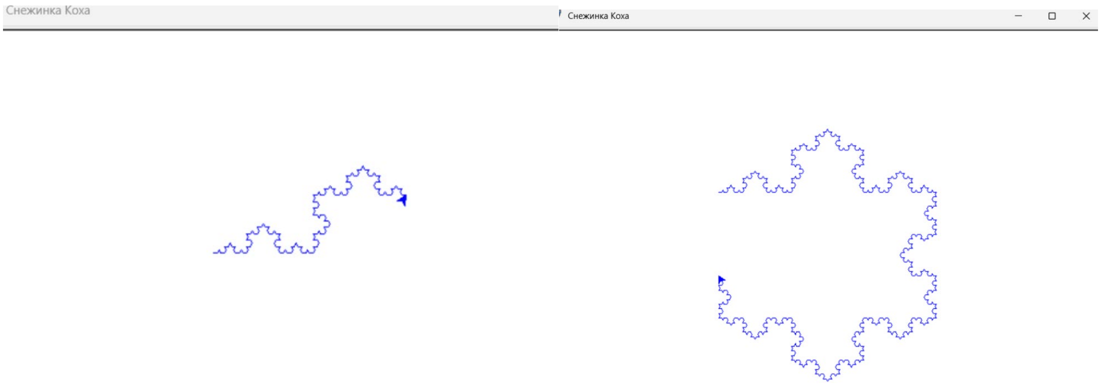


Рисунок 4.2 – Построение кривой Коха

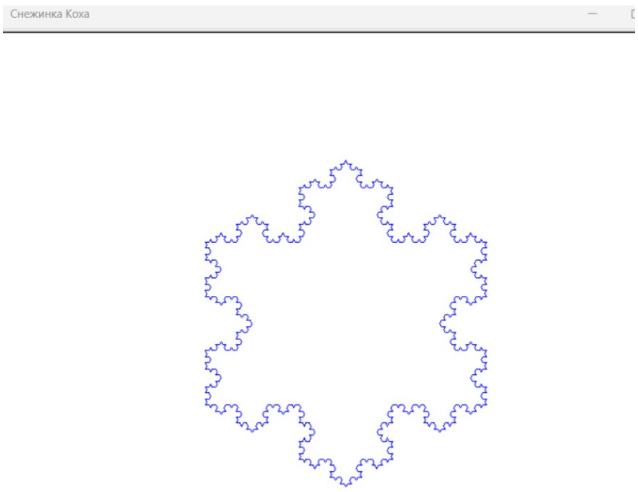


Рисунок 4.3 – Кривая Коха

4.1.2. Построение множества Мандельброта

Множество Мандельброта – это один из наиболее известных и изученных фракталов, являющийся ярким примером сложных структур, возникающих из простых математических правил.

В основе такого множества лежит формула:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C,$$

где Z и C – комплексные числа.

Основная идея – для каждого пикселя изображения определить соответствующее комплексное число C, затем итерировать функцию и смотреть, уходит ли оно за границы (по модулю > 2). Максимальное число итераций задается параметром, который регулирует детализацию и глубину изображения. Чем больше число, тем более точное отображение, но и выше требования к вычислительным ресурсам. Основными положениями при построении является: создание двумерного массива, соответствующего области комплексной плоскости, итеративное вычисление для каждого элемента, промежуточное и итоговое отображение результатов с помощью цветовой палитры.

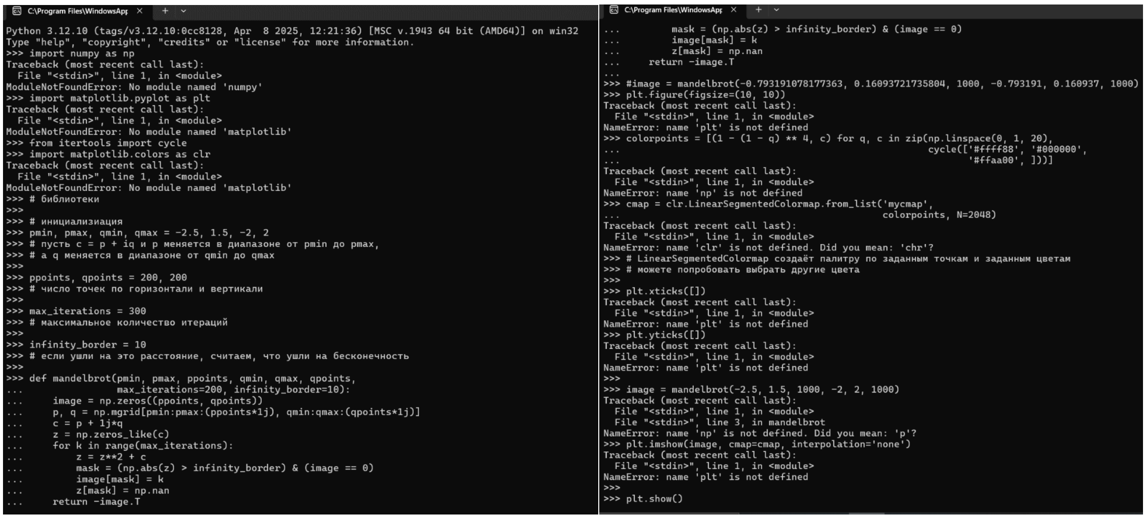


Рисунок 4.4 – Программный код на языке Python, предназначенный для построения множества Мандельброта

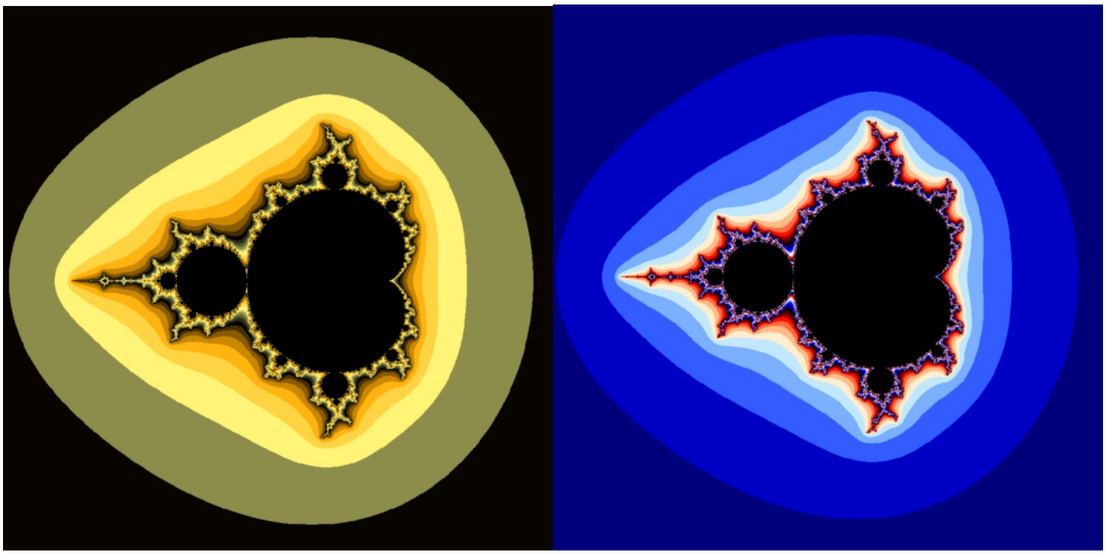


Рисунок 4.5 – Множество Мандельброта

Можно сказать, что значения цветовой палитры (`cmap`) можно менять для получения разных визуальных эффектов. Параметр `max_iter` влияет на глубину проработки границы множества и детализацию. Для повышения производительности в более сложных случаях возможна реализация с использованием JIT-компиляции (например, с помощью `numba`) или параллельных вычислений.

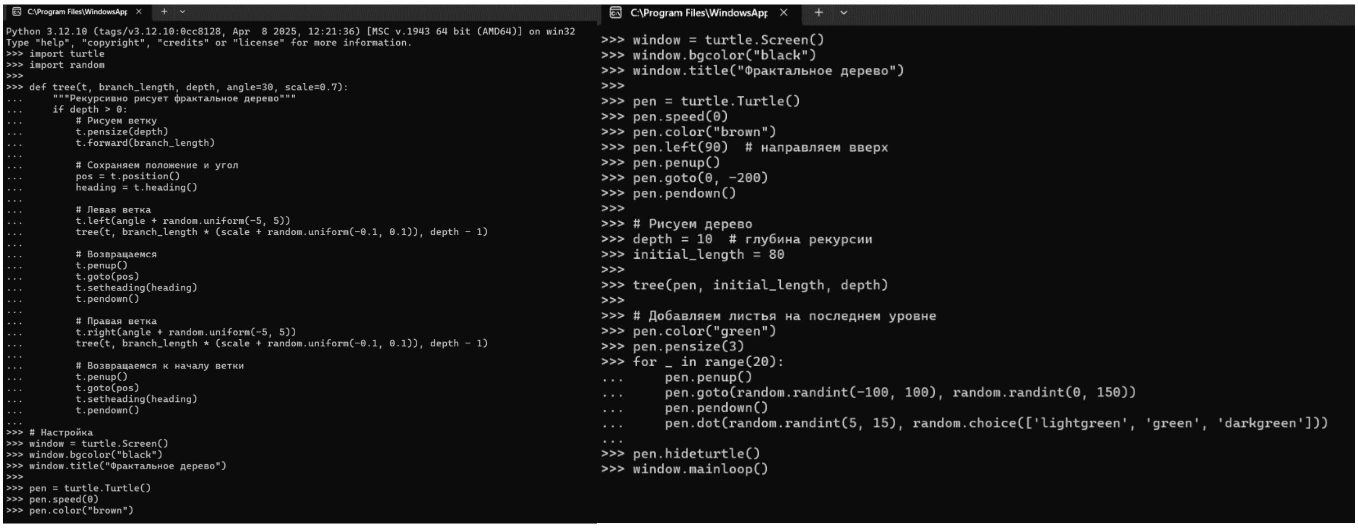
4.1.3. Методика построения фрактального дерева

Методика построения фрактального дерева с использованием программного кода на языке Python основывается на рекурсивных алгоритмах, позволяющих моделировать естественное разветвление ветвей в растительных структурах и создавать визуальные изображения с высокой степенью детализации и самоподобия. В качестве инструментария применяются графические библиотеки, такие как turtle, которая обеспечивает интуитивное управление движением и позволяет реализовать логику построения ветвей путем последовательных команд рисования и поворота.

Основной подход заключается в начальной установке начальной точки и направления рисования, после чего при помощи рекурсивных моделей создаются две новые ветви под определенным углом относительно исходной. На каждом шаге длина ветки сокращается по заданному коэффициенту, что имитирует естественное уменьшение размерности ветвей при движении вверх по уровню иерархии. В ходе рекурсии программа осуществляет следующее: рисует текущий сегмент, затем возвращает черепашку в исходное положение, после чего создает левую и правую ветви, соответствующие соответствующим наклонам. Процесс продолжается до достижения строго заданной глубины рекурсии, после чего разветвление прекращается, и итоговая структура приобретает характер типичного фрактала с высокой степенью самоподобия.

Используемая в программной реализации функция обладает следующими ключевыми характеристиками: она принимает текущую длину ветки и уровень рекурсии в качестве входных параметров; внутри нее происходит проверка на достижение максимальной глубины, что служит фундаментом для остановки рекуррентного разветвления. В теле функции рисуются сегменты линий с помощью команд forward, после чего осуществляется поворот налево и направо с помощью команд left и right соответствующих углов. После каждого вызова рекурсии программа возвращается к исходной точке и ориентации через команды setposition и setheading, что обеспечивает правильную иерархию ветвления и предотвращает ошибочные смещения при последующих командах.

Параметры, такие как угол поворота (angle), коэффициент уменьшения длины ветки (length_scale) и максимальная глубина рекурсии (depth), поддаются настройке для получения различных вариаций фрактальных структур. Регулировка указанных параметров позволяет моделировать как симметричные и аккуратные деревья, так и более усложненные или асимметричные формы. Такой подход обеспечивает не только создание эстетически привлекательных графических изображений, но и способствует анализу структурных свойств и масштабной иерархии природных объектов.



```
Python 3.12.10 (tags/v3.12.10:0cc8128, Apr  8 2025, 12:21:36) [MSC v.1943 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> import turtle
>>> import random
>>>
>>> def tree(t, branch_length, depth, angle=30, scale=0.7):
...     """Рекурсивно рисует фрактальное дерево"""
...     if depth > 0:
...         # Рисуем ветку
...         t.pensize(depth)
...         t.forward(branch_length)
...
...         # Сохраняем положение и угол
...         pos = t.position()
...         heading = t.heading()
...
...         # Левая ветка
...         t.left(angle + random.uniform(-5, 5))
...         tree(t, branch_length * (scale + random.uniform(-0.1, 0.1)), depth - 1)
...
...         # Возвращаемся
...         t.penup()
...         t.goto(pos)
...         t.setheading(heading)
...         t.pendown()
...
...         # Правая ветка
...         t.right(angle + random.uniform(-5, 5))
...         tree(t, branch_length * (scale + random.uniform(-0.1, 0.1)), depth - 1)
...
...         # Возвращаемся к началу ветки
...         t.penup()
...         t.goto(pos)
...         t.setheading(heading)
...         t.pendown()
...
>>> # Настройка
>>> window = turtle.Screen()
>>> window.bgcolor("black")
>>> window.title("Фрактальное дерево")
>>>
>>> pen = turtle.Turtle()
>>> pen.speed(0)
>>> pen.color("brown")
```

```
>>> window = turtle.Screen()
>>> window.bgcolor("black")
>>> window.title("Фрактальное дерево")
>>>
>>> pen = turtle.Turtle()
>>> pen.speed(0)
>>> pen.color("brown")
>>> pen.left(90)  # направляем вверх
>>> pen.penup()
>>> pen.goto(0, -200)
>>> pen.pendown()
>>>
>>> # Рисуем дерево
>>> depth = 10  # глубина рекурсии
>>> initial_length = 80
>>>
>>> tree(pen, initial_length, depth)
>>>
>>> # Добавляем листья на последнем уровне
>>> pen.color("green")
>>> pen.pensize(3)
>>> for _ in range(20):
...     pen.penup()
...     pen.goto(random.randint(-100, 100), random.randint(0, 150))
...     pen.pendown()
...     pen.dot(random.randint(5, 15), random.choice(['lightgreen', 'green', 'darkgreen']))
...
>>> pen.hideturtle()
>>> window.mainloop()
```

Рисунок 4.6 – Программный код на языке Python, предназначенный для построения фрактального дерева

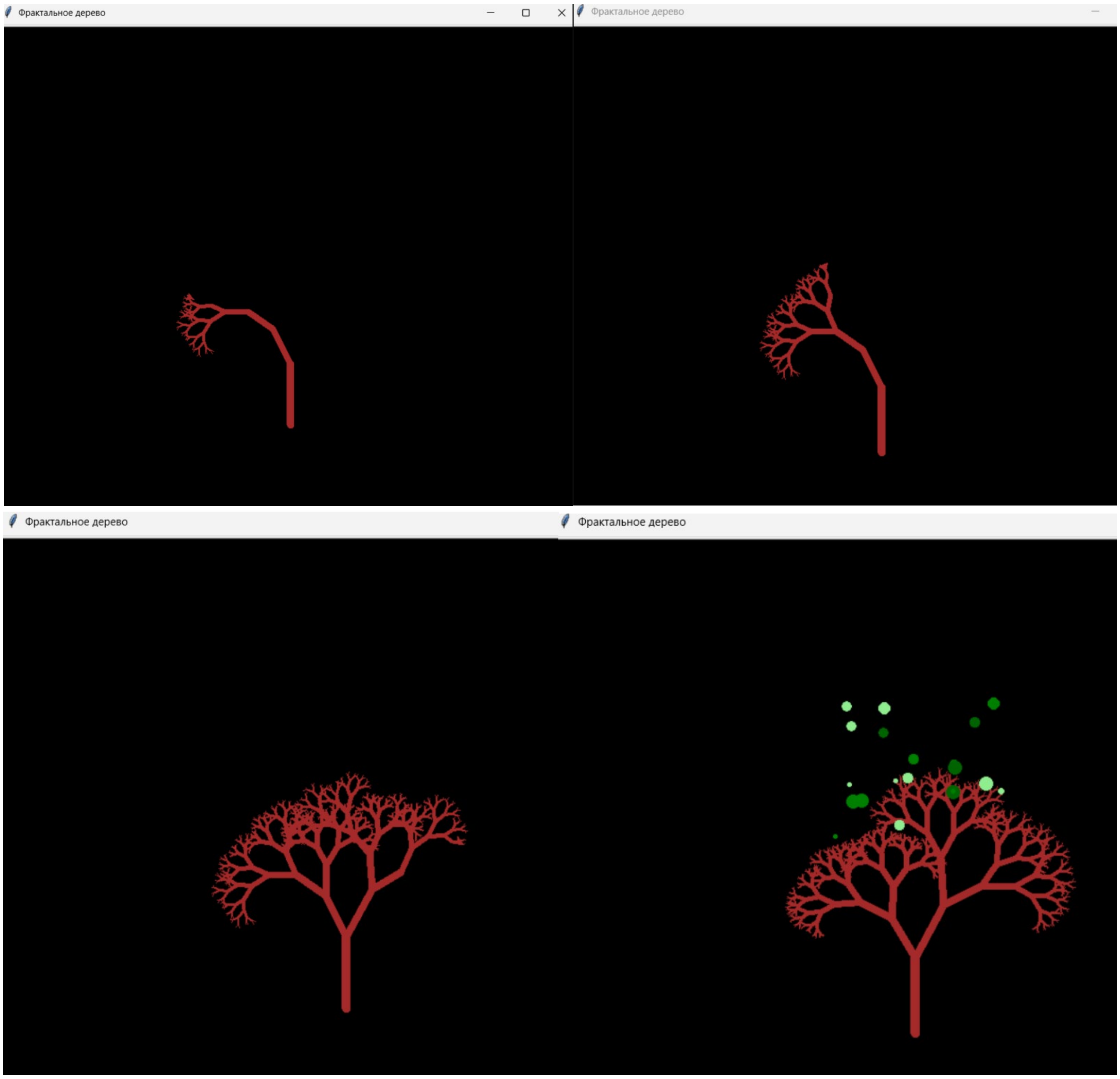


Рисунок 4.7 – Построение фрактального дерева

4.2. Результаты эксперимента

В ходе практической части выполнены эксперименты по построению и визуализации трёх классических фрактальных структур – множества Мандельброта, снежинки Коха и фрактального дерева. Каждый из реализованных алгоритмов позволил исследовать свойства самоподобия, масштабирования и бесконечности этих объектов, а также продемонстрировать визуальные характеристики, характерные для соответствующих фракталов.

Первым этапом было создание множества Мандельброта, что реализовалось посредством итеративных вычислений комплексных чисел с использованием заданных параметров ограничений по итерациям и масштабу. Результатом стала яркая и выразительная сфера, насыщенная деталями на различных масштабах, которая характерна для множества сложных чисел, оставляющих свои следы в сложной границе. Визуализация показала, что структура множества обладает высокой степенью самоподобия: его фрактальные границы повторяют свои формы при увеличении масштаба, что подтверждает классические свойства данного фрактала в рамках заданных параметров.

Следующим этапом оказалась реализация кривой Коха – классического примера геометрического фрактала, характеризующегося бесконечной детализацией и сложными узорами, образованными при последовательных делениях и добавлении треугольников. В результате эксперимента получилась снежинообразная структура, обладающая свойствами пространственной самоподобности. Визуализация показала, что при увеличении уровня итераций структура складывается из повторяющихся треугольных элементов, расширяясь в бесконечно малых масштабах, что отвечает теоретическим ожиданиям и подтверждает свойства классической снежинки Коха.

Третьим этапом было построение фрактального дерева, которое моделировалось посредством рекурсивных команд, реализующих разветвление ветвей. Полученная структура имела вид симметричного дерева с множеством ветвлений, каждый уровень которого демонстрировал уменьшение длины веток и увеличение количества разветвлений. Эксперимент подтвердил наличие свойств масштабируемости и самоподобия, при этом параметры угла разветвления и коэффициента сокращения длины ветвей были вариативными, что позволяло получать разнообразные визуальные формы, приближающиеся к природным аналогам.

Для наглядной демонстрации полученных результатов была составлена таблица 4.1, содержащая основные параметры и свойства построенных фракталов:

Таблица 4.1 – Основные параметры и свойства построенных фракталов

Тип фрактала	Параметры	Максимальная глубина/итерации	Визуальный эффект	Основные свойства
Множество Мандельброта	Максимальная итерация = 1000, масштаб = 1	1000	Границы с сложной, бесконечной границей	Высокая степень самоподобия на границах
Снежинка Коха	Угол = 60°, итерации = 4	4	Звездообразная, бесконечно детал curling	Многоуровневая самоподобная структура

Тип фрактала	Параметры	Максимальная глубина/итерации	Визуальный эффект	Основные свойства
Фрактальное дерево	Угол разветвления = 30°, коэффициент = 0.7	10	Деревья с множеством ветвей	Масштабируемость, симметрия и рекурсивная природа

Обобщая полученные результаты, можно отметить, что все три эксперимента подтвердили основные свойства фракталов: бесконечную детализацию, масштабируемость и самоподобие. Множество Мандельброта выступает как образец комплексной и сложной границы, обладающей высокой сложности при максимальной итерации, хорошо демонстрируя свойства сложных систем. Кривая Коха, представляющая классический геометрический фрактал, отличалась высокой симметрией и регулярностью, что позволяет использовать её в моделировании природных и искусственных структур. Фрактальное дерево отличалось устойчивостью к вариациям параметров и демонстрировало четкую рекурсивную природу разветвления, что актуально для моделирования биологических систем и природных объектов.

Эти результаты подтверждают широту применения алгоритмических методов для построения фрактальных структур, а также свидетельствуют о возможности их использования в образовательной, научной и инженерной практике. Построенные фракталы служат не только наглядными иллюстрациями теоретических положений, но и основываются на математически строгой и гибкой платформе, что содействует дальнейшему развитию исследований в области фрактальной геометрии и её приложений.

Заключение

В заключение, можно подчеркнуть, что фракталы представляют собой уникальную и многогранную область современной геометрии, обладающую свойствами самоподобия, масштабной инвариантности и бесконечной детализации. Исследование таких структур, как множество Мандельброта, кривая Коха и множества Жюлиа, позволяет не только углубить понимание фундаментальных математических закономерностей, лежащих в основе фрактальной геометрии, но и открыть широкие возможности для их практического применения в различных сферах науки и техники.

Ключевым аспектом данного исследования является использование современных компьютерных средств и программных алгоритмов, что значительно расширяет возможности моделирования, визуализации и анализа сложных фрактальных структур. Реализация алгоритмов на языке Python продемонстрировала, что автоматизация позволяет не только воссоздавать классические фракталы с высокой точностью, но и экспериментировать с их параметрами, создавая новые вариации и модификации. Такие подходы дают возможность выявлять новые свойства и закономерности, а также применять полученные знания в моделировании природных форм, создании компьютерной графики, а также в разработке инновационных инженерных решений.

Практическая часть работы, включающая построение кривой Коха, множества Мандельброта и фрактального дерева, подтвердили теоретическую гипотезу о преимуществах компьютерного моделирования в изучении сложных структур. Созданные изображения и анимации позволили не только визуализировать свойства самоподобия и масштабирования, но и получить более глубокое понимание механизмов их формирования. Такой подход способствует развитию теоретической базы фрактальной геометрии и расширяет горизонты её практического использования.

В целом, выполненная работа является значительным вкладом в развитие современных методов исследований в области фрактальной геометрии. Данная работы открывает широкие перспективы для дальнейших исследований, направленных на совершенствование алгоритмов, расширение классификации фрактальных структур и их внедрение в междисциплинарные области, где важны свойства сложности, масштабируемости и бесконечности природных и искусственных систем.

Список литературы

1. Норматов Ж. С. Фракталы и их применение // Экономика и социум. 2020. №3 (70). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/fraktaly-i-ih-primenenie (дата обращения: 25.11.2025).

2. Поликарпов М И «Фракталы, топологические дефекты и невылетание в решеточных калибровочных теориях» УФН 165 627–644 (1995)

3. Еровенко В. А. Концепция фрактала Мандельброта с математической и философской точек зрения // МСиМ. 2015. №4 (36). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptsiya-fraktala-mandelbrota-s-matematicheskoy-i-filosofskoy-tochek-zreniya (дата обращения: 25.11.2025).

4. Куромбоев Х. Н., Муродхужаев Р., Носирхужаев Н. Понятие комплексных чисел // Экономика и социум. 2019. №2 (57). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ponyatie-kompleksnyh-chisel (дата обращения: 25.11.2025).

5. Арзамасцева Галина Васильевна, Евтихов Михаил Григорьевич, Лисовский Федор Викторович, & Мансветова Екатерина Георгиевна (2016). Семейство обобщенных триадных фракталов Коха: размерности и Фурье-образы. Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии, 8 (1), 81-90.

6. Левин, И. И., Хисамутдинов, М. В., & Шмойлов, В. И. (2014). Функция Вейерштрасса и r/φ -характеристики. Известия Южного федерального университета. Технические науки, (1 (150)), 144-158.

7. Секованов, В. С. (2012). О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций. Вестник Костромского государственного университета, 18 (2), 23-28.

8. Рахимов Рустам Хакимович (2024). Фракталы и устройство Вселенной. Computational nanotechnology, 11 (4), 190-208. doi: 10.33693/2313-223X-2024-11-4-190-208

9. Черепков, А. А., & Кузьмин, А. В. (2011). Фрактальные модели в природе и технике. Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе, (1), 209-214.

10. Норматов Ж.С. (2020). Фракталы и их применение. Экономика и социум, (3 (70)), 427-432.

11. Потапов А.А. (2022). Фрактальные приложения в радиоэлектронике как фрактальная инженерия. Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии, 14 (3), 215-232.

12. Жуков, Д. С., & Лямин, С. К. (2010). Варианты использования методов фрактальной геометрии в социальных и политических исследованиях. Ineternum, 2, 17-35.

13. Barcellos, A. (1990). Fractals Everywhere. By Michael Barnsley. American Mathematical Monthly.