ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ, ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКИХ И ТВОРЧЕСКИХ РАБОТ ОБУЧАЮЩИХСЯ «НАУКА, ТВОРЧЕСТВО, ДУХОВНОСТЬ»

Направление: МАТЕМАТИКА

Тема: СИСТЕМЫ ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Соискатель: Назаренко Анастасия Евгеньевна, ученица 9 класса

Научный руководитель: Пекарская Светлана Николаевна, учитель математики

Место выполнения работы: МБОУ «Гимназия № 1 г. Владивостока», Приморский край, г. Владивосток

2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы

Системы дают более глубокое понимание алгоритма решения уравнений. Также они являются иллюстрацией графиков функций, как множества точек. Абитуриенты, которые хорошо научились решать системы уравнений гораздо смелее переходят к моделям с несколькими неизвестными. В том числе лучше понимают принцип «число уравнений должно совпадать с числом неизвестных». Особенно это важно для планиметрических и текстовых задач.

Таким образом, актуальность данной работы заключается в поиске связи между абстрактными формулами и их практическим применением в инженерии и географии. Исследование поможет понять, как «лишняя» переменная в уравнении превращает сухую алгебру в инструмент, позволяющий ориентироваться в пространстве.

Цель: изучить, что такое системы линейных уравнений состоящие из трёх линейных уравнений. И научиться их решать. Понять, есть ли для них какое-нибудь практическое применение?

Задачи:

1. Раскрыть понятие, что такое системы линейных уравнений и могут ли они состоять из трёх линейных уравнений.
2. Изучить алгоритмы решения систем линейных уравнений
3. Обосновать практическое применение системам линейных уравнений.

Объект исследования: системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Предмет исследования: способы решения таких систем.

Гипотеза: системы уравнений с тремя неизвестными не являются просто абстрактной математической задачей, а служат фундаментом для работы различных систем(навигация, логистика, строительство, промышленная химия, диетология и т.п.), без которых невозможна жизнь современного человека.

Глава 1. История возникновения систем линейных уравнений

1.1.История возникновения систем линейных уравнений

В древневавилонских текстах, написанных в III – II тысячелетиях до н.э., содержится немало задач, решаемых с помощью составления систем уравнений, в которые входят и уравнения второй степени. Вот одна из них. Площади двух своих квадратов я сложил: $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5. Соответствующая система уравнений в современной записи имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\dfrac{5}{12}, \\ y = \dfrac{2}{3}x + 5 \end{cases}$$

- Для решения этой системы вавилонский автор возводит во втором уравнении y в квадрат, получает , $y^2 = \frac{4}{9}x + \frac{20}{3}x + 25$.
- Подставив это значение в первое уравнение, получает $1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}$. Решая уравнение, находит x, затем y.
- Так как вавилоняне не имели обозначений для многих неизвестных, то они прилагали немало усилий для выбора неизвестного таким образом, чтобы свести решение системы к решению одного уравнения.

Диофант

ДИОФАНТ (около 250)

Греческий математик Диофант III в. разработал методы решения алгебраических уравнений и систем таких уравнений со многими неизвестными в рациональных числах. Например, он решил в рациональных числах уравнение, систему уравнений, сейчас они носят его имя - Диофантовы уравнения.

Задача: Найти два натуральных числа, зная, что их сумма равна 20, а сумма их квадратов 208. Мы бы решали эту задачу составлением системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208. \end{cases}$$

Диофант же, выбирая в качестве неизвестного половину разности искомых чисел, получает (в современных обозначениях):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-y)=z, \\ \frac{1}{2}(x+y)=10 \end{cases}$$

$$x=z+10;\ y=10-z$$

Далее

$x^2 + y^2 = (z + 10)^2 + (10 – z)^2 = 2z^2 + 200$, а по условию это равно 208,

$2z^2 + 200 = 208$

$z = \pm 2$; $z = – 2$ – не удовлетворяет условию задачи, поэтому, если $z = 2$, то $x = 12$, а $y = 8$.

Первое введение понятия определителя для целей решения систем линейных уравнений относят к Лейбницу (1678 или 1693 год), но эти работы не были опубликованы. Также определитель обнаруживается в трудах Сэки Такакадзу 1683 года, в которых он обобщил метод решения систем линейных уравнений из древнекитайской «Математики в девяти книгах» до уравнений с неизвестными.

Маклорен, фактически используя простейшие определители в трактате, вышедшем 1748 году, приводит решения систем их двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трёх уравнений с тремя неизвестными.

Гауссу (около 1800 года) принадлежит формализация метода последовательного исключения переменных для решения этих задач, ставшего известным под его именем (хотя по существу для решения систем линейных уравнений именно этот метод и использовался с древности).

Основоположником современных буквенных обозначений неизвестных и знаков степеней является французский математик Франсуа Виет. Однако его обозначения значительно отличались от сегодняшних. Например, квадрат неизвестного числа он обозначал буквой Q (лат."quadratus"), а куб – буквой C (лат. "cubus"). Эти обозначения сейчас кажутся неудобными, но тогда это был наиболее понятный способ записать системы линейных алгебраических уравнений.

Однако недостатком в тогдашних методах решения было то, что математики рассматривали только положительные корни. Возможно, это связано с тем, что отрицательные значения не имели никакого практического применения. Так или иначе, но первыми считать отрицательные корни начали именно итальянские математики Никколо Тарталья, Джероламо Кардано и Рафаэль Бомбелли в 16 веке. А современный вид, основной метод решения квадратных уравнений (через дискриминант) был создан только в 17 веке благодаря работам Декарта и Ньютона.

В середине 18 века швейцарский математик Габриэль Крамер нашёл новый способ для того, чтобы сделать решение систем линейных уравнений проще. Этот способ был впоследствии назван его именем и по сей день, мы пользуемся им. Но о методе Крамера поговорим чуть позднее, а пока обсудим линейные уравнения и методы их решения отдельно от системы.

1.2.Линейные уравнения

Простыми линейными уравнениями, или линейными уравнениями с одной переменной, в алгебре называют такие выражения, в которых переменная, умноженная на какое-либо действительное число, приравнивается к некоторому другому действительному числу. Основное отличие таких уравнений от любых других – то, что в них присутствует только одна переменная, и она всегда стоит в первой степени.

Основные характеристики линейных уравнений:

ИНФОРМАЦИЯ О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ	ПОДРОБНОСТИ
Общий вид линейного уравнения с одной переменной: ax = b	Где a, b – действительные числа, x – переменная
Общий вид линейного уравнения с двумя переменными: ax + by = c	Где a, b, c – действительные числа, x, y – переменные
Решением или корнем линейного уравнения является число или пара чисел	При их подстановке вместо переменных уравнение превращается в верное равенство
Линейные уравнения могут иметь одно или бесконечно много решений или не иметь их вовсе	Количество решений уравнения зависит от коэффициентов при переменных

Формула линейного уравнения

В общем виде линейное уравнение с одной переменной может быть представлено формулой: $\boldsymbol{ax = b}$, где

a – действительное число, оно называется коэффициентом линейного уравнения,

b – действительное число, называемое свободным членом уравнения,

x – переменная (неизвестное число, которое необходимо найти).

Но не стоит забывать и о том, что это лишь общий вид, а в учебниках и задачниках могут встретиться и такие уравнения, которые сначала нужно к такому виду привести. Например, если обозначить буквами a, b, c и d действительные числа, следующие уравнения с переменной x также будут линейными:

$$ax + b = 0;$$
$$ax + bx = c - d;$$
$$ax \cdot b - c = d.$$

Пошаговая инструкция по решению линейных уравнений:

Зная, как выглядят линейные уравнения, приступим к пошаговому плану решения. Но для начала разберемся, что же вообще является их решением.

В линейном уравнении есть лишь одно неизвестное число – переменная, которая обычно обозначается латинской буквой. А значит, решением будет такое значение этой переменной, с которым уравнение превращается в верное равенство. Другое название этого значения – корень линейного уравнения.

Преобразование линейных уравнений

Чтобы решать было максимально легко, уравнение заранее следует привести к виду

$$ax = b.$$

То есть нужно сгруппировать все коэффициенты при переменной и вычислить их сумму, а также вычислить итоговое значение свободного члена.

Вычисление значения переменной

А теперь посмотрим на получившееся уравнение: как думаете, что нужно, чтобы вычислить подходящее значение переменной? Конечно, необходимо лишь разделить значение свободного члена на коэффициент при переменной. При этом стоит помнить о некоторых свойствах решения линейных уравнений:

- если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, корень равен $b : a$;
- если $a = 0,\ b \neq 0$, уравнение не имеет корней;
- если $a \neq 0,\ b = 0$, корень равен 0;
- если $a = 0$ *и* $b = 0$, корнем является любое число.

Линейные уравнения с двумя переменными

Кроме простых линейных уравнений с одной переменной, существуют и линейные уравнения с двумя переменными, которые обычно обозначаются латинскими буквами x и y. Общий вид такого уравнения: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, где

a, b – действительные числа, они называется коэффициентами линейного уравнения;
c – действительное число, называемое свободным членом уравнения;
x, y – переменные (неизвестные числа, которые необходимо найти).

Решением линейного уравнения с двумя переменными будет пара чисел, соответствующих x и y. Если эти числа подставить на место переменных, должно получиться верное равенство. Чаще всего таких пар чисел можно подобрать бесконечно много, и все множество решений при изображении на координатной плоскости с осями x и y будет лежать на прямой линии. Отсюда и название этого типа выражений, а саму прямую называют графиком линейного уравнения.

Чтобы решить такое уравнение (при условии, что коэффициенты при переменных не равны нулю одновременно), достаточно:

1. выбрать два любых удобных значения (x_1 и x_2) для переменной x;
2. подставить их в уравнение;
3. получить два линейных уравнения, оба – с одной переменной y;
4. решить полученные уравнения и найти соответствующие значения (y_1 и y_2);
5. отметить точки ($x_1; y_1$) и ($x_2; y_2$) на координатной плоскости;
6. провести прямую через эти точки;
7. координаты любой точки на этой прямой будут решениями исходного уравнения.

Если хотя бы один из коэффициентов при переменных равен нулю, мы сразу переходим к пункту 4. Графиком решений в этом случае будет прямая, параллельная оси переменной с нулевым коэффициентом: при любом ее значении другая переменная будет равна одному и тому же числу.

Если нулю равны оба коэффициента, но свободный член – ненулевой, уравнение решений не имеет.

1.3. Системы линейных уравнений

Система линейных уравнений – это объединение из n линейных уравнений, каждое из которых содержит k переменных. Записывается это так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – некоторые числа.

Решение системы уравнений – это последовательность чисел ($k_1, k_2, ..., k_n$), которая является решением каждого уравнения системы, т.е. при подстановке в это уравнение вместо переменных ($x_1, x_2, ..., x_n$) дает верное числовое равенство.

Соответственно, решить систему уравнений – значит найти множество всех ее решений или доказать, что это множество пусто. Поскольку число уравнений и число неизвестных может не совпадать, возможны три случая:

1. Система несовместна, т.е. множество всех решений пусто. Достаточно редкий случай, который легко обнаруживается независимо от того, каким методом решать систему.
2. Система совместна и определена, т.е. имеет ровно одно решение. Классический вариант, хорошо известный еще со школы.
3. Система совместна и не определена, т.е. имеет бесконечно много решений. Это самый сложный вариант. Недостаточно указать, что«система имеет бесконечное множество решений» — надо описать, как устроено это множество.

Как правило, в школе все решали системы с двумя или даже тремя уравнениями. Но бывают системы с четырьмя и более составляющими. Такие системы мы рассмотрим подробнее далее.

1.4. Области применения системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений (СЛУ) находят применение практически во всех сферах, где требуется математическое моделирование.

Экономика: Линейные модели используются для анализа рыночного равновесия, прогнозирования спроса и предложения, оптимизации производственных процессов и управления финансовыми потоками. Например, можно рассчитать оптимальное соотношение ресурсов для максимизации прибыли или спрогнозировать влияние изменения цен на объем продаж.

Физика: Линейные уравнения описывают движение тел под действием постоянных сил, распространение волн в однородной среде, электрические цепи и многие другие физические явления. Законы Ньютона, законы Ома и Кирхгофа — все это примеры применения линейных соотношений.

Химия: Линейные уравнения применяются для решения задач, связанных со стехиометрией, определением состава смесей и расчетом химических реакций. Например, можно рассчитать количество реагентов, необходимых для получения определенного количества продукта, или определить концентрацию веществ в растворе.

Инженерное дело: Линейные модели лежат в основе расчетов прочности конструкций, проектирования электрических и электронных схем, анализа механических систем и управления процессами. Инженеры используют их для создания надежных и эффективных технических решений, от мостов и зданий до самолетов и микрочипов.

Информатика: Линейная алгебра является основой для многих алгоритмов машинного обучения, компьютерной графики, обработки изображений и сигналов. Она используется для построения моделей, которые позволяют компьютерам распознавать образы, классифицировать данные, и выполнять многие другие задачи.

Биология: Линейные модели применяются для изучения динамики популяций, распространения заболеваний, анализа генетических данных и моделирования биологических процессов. Они помогают биологам понимать сложные взаимодействия в живых системах.

Глава 2. Способы решения систем линейных уравнений

Мы уже умеем решать линейные уравнения. Займёмся решением систем линейных уравнений, а именно таких систем, в которых есть две переменные. Есть три основных метода решения любых систем уравнений:

1. Метод подстановки.
2. Метод домножения и сложения.
3. С помощью графиков

Рассмотрим каждый из них.

1. Метод подстановки

Идея этого метода в следующем: пусть мы знаем значение одной из переменных. Тогда, чтобы найти вторую переменную, нужно подставить значение первой переменной в любое из уравнений. В результате получается обычное линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Если нам скажут, что $x = 2$, то найти y не составит труда – подставим значение, например, во второе уравнение:

$$2 \cdot 2 + y = 1$$
$$y = 1-4$$
$$y = -3$$

Такой же результат получится, если подставить известное значение x=2 в первое уравнение:

$$2 - 2y = 8$$
$$2y = -6$$
$$y = -3$$

Т. е. мы подставляем известное значение переменной, получаем линейное уравнение с одной переменной, которое мы уже умеем решать.Но что делать, если ни одно из значений переменных нам не известно?

Предположим, что мы уже знаем значение переменной. Тогда из первого уравнения мы бы получили такое значение второй переменной:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = 8 - x \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = x - 8 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x-8}{2} \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

Но значение переменной в обоих уравнениях должно получиться одинаковым:

$$y = \frac{x-8}{2} = 1 - 2x \qquad \text{или} \qquad 1 - 2x = \frac{x-8}{2}$$

Решим это линейное уравнение – домножив обе части уравнения на 2:

$$1 - 2x = \frac{x-8}{2} \Big| \cdot 2$$

$$2 - 4x = x - 8$$

Перенесем все слагаемые с переменной в одну часть уравнения, а без неё – в другую:

$5x = 10$

$x = 2$

Получим решение системы:

$$y = \frac{2-8}{2} = 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

$(2; -3)$

Ответ:(2;-3) .

Каждый раз выражать переменную из двух уравнений необязательно.Из первого уравнения мы получили:

$x = 8 + 2y$

Перепишем систему в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} x = 8 + 2y \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Говорят: «мы выразили переменную x из первого уравнения». Как мы уже говорили, раз уравнения объединены в систему, то в каждом из этих уравнений речь идёт об одних и тех же x, y. Значит, информацию об x из первого уравнения можно использовать во втором.

Именно поэтому метод называется «методом подстановки»: информацию из одного уравнения подставляем в другое.

Заменим во втором уравнении x на эквивалентное выражение из первого уравнения. Получим:

$$\begin{cases} x = 8 + 2y \\ 2 \cdot (8 + 2y) + y = 1 \end{cases}$$

Дальше всё то же самое: получили линейное уравнение с одной переменной, которое мы уже умеем решать:

$$\begin{cases} x = 8 + 2y \\ 16 + 4y + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 + 2y \\ 5y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 + 2y \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 + 2 \cdot (-3) \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 - 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Сформулируем алгоритм решения системы уравнений методом подстановки:

- Выразить одну (любую) переменную из любого уравнения через другую переменную.
- Подставить полученное выражение в другое уравнение.
- Решить уравнение с одной переменной.

- Найденное значение переменной подставить в первое уравнение и найти значение второй переменной.

2. Метод домножения и сложения

Пусть у нас есть двое уравновешенных весов. Если мы пересыпаем все с левых чаш на одну чашу других весов, а с правых – на вторую, то весы также будут уравновешены. Т. е. если сложить правые и левые части верных равенств, мы также получим верное равенство.

Как мы можем использовать это для решения систем линейных уравнений? Можно сложить уравнения системы. Так, как если мы в результате избавимся от одной переменной, то получим линейное уравнение с одной переменной, которое мы умеем решать.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ x + 5y = 19 \end{cases}$$

Мы видим, что уравнения содержат слагаемые 5у и -5у, которые взаимно уничтожатся при сложении.Сложим отдельно левые и правые части уравнений системы:

$$2x - 5y + x + 5y = 8 + 19$$

Получаем:

$$3x = 27$$

Мы получили линейное уравнение с одной переменной, решим его:

$$x = 9$$

Теперь подставим найденное значение $x = 9$ в любое из уравнений системы, например в первое, и найдему:

$$2 \cdot 9 - 5y = 8$$

$$18 - 5y = 8$$

$$5y = -10$$

$$y = 2$$

Получаем решение:

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ:(9;2) .

В этом и состоит идея метода – исключить сложением одну из переменных.Конечно, мы рассмотрели простой пример. Редко бывает, чтобы в двух уравнениях были слагаемые с одинаковыми (по модулю) коэффициентами. Поэтому нужно научиться приводить любую систему уравнений к эквивалентному виду, содержащему такие слагаемые.

Вспомним, что при умножении и делении обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число получается эквивалентное уравнение, содержащее ту же информацию (с теми же корнями).

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 9y = 1 \\ 5x - 18y = -28 \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 2 :

$$\begin{cases} 4x + 9y = 1 | \cdot 2 \\ 5x - 18y = -28 \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} 8x + 18y = 2 \\ 5x - 18y = -28 \end{cases}$$

Заметим, что уравнения содержат слагаемые $18y$ и $-18y$. Теперь уже можно воспользоваться методом сложения:

$$8x + 18y + 5x - 18y = 2 + (-28)$$

$$13x = -26$$

$$x = -2$$

Подставим найденное значение $x = -2$ в первое уравнение:

$4 \cdot (-2) + 9y = 1$

$-8 + 9y = 1$

$9y = 9$

$y = 1$

Получаем решение:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: (– 2; 1).

Сформулируем алгоритм решения систему уравнений методом домножения и сложения:

- Преобразовать уравнения системы так, чтобы в результате сложения получилось уравнение с одной переменной (если необходимо).
- Сложить отдельно левые и правые части уравнений системы.
- Решить уравнение с одной переменной.
- Найденное значение переменной подставить в любое уравнение и найти значение второй переменной.

3. Решение систем линейных уравнений при помощи графиков

Т. к. графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая, то решение системы можно иллюстрировать при помощи прямых.

Пример 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Изобразим множество решений каждого уравнения: построим графики уравнений. Рассмотрим первое уравнение:

$$x + 2y = 4$$

Множество решений – прямая. Чтобы ее изобразить, нужны две любые точки, т. е. два любых решения. Можно взять, например, такие решения:

(0;2), (4;0).

Отметим эти решения на координатной плоскости и проведём через них прямую. Мы получили все решения первого уравнения системы.

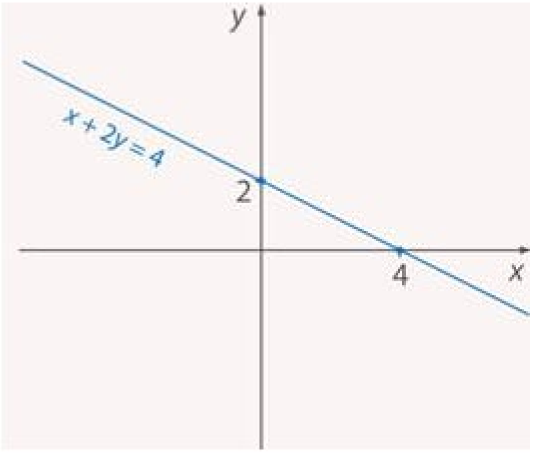


График прямой $x + 2y = 4$

Аналогично для второго уравнения:

$x - 2y = 0$

Возьмем, например, точки (0;0), (6;3). Изобразим их на координатной плоскости и проведём через них прямую.

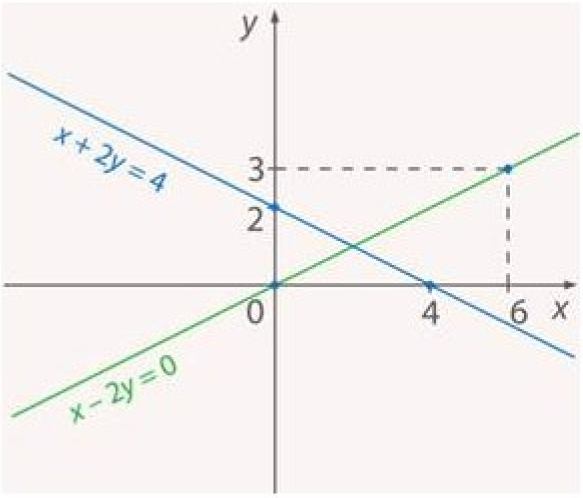
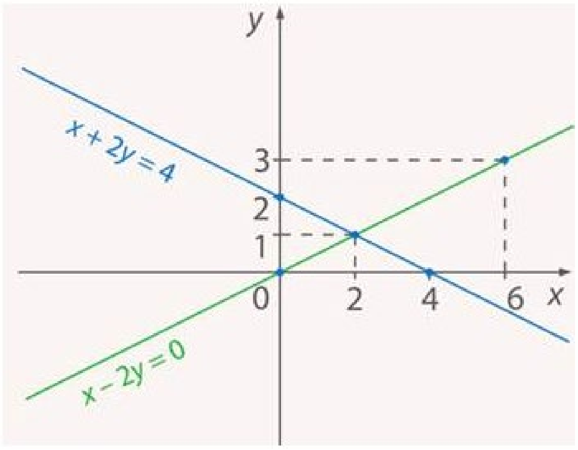


График прямой $x - 2y = 0$

Итак, каждая прямая – это множество решений одного уравнения. Точка пересечения прямых, является решением обоих уравнений. По-другому это решение можно записать в виде пары чисел, а именно координат точки пересечения: (2;1).



Точка пересечения прямых $x + 2y = 4$ и $x - 2y = 0$.

Решение превращает уравнение в верное числовое равенство. Проверим, т. е. вместо переменных подставим найденные значения:

$$\begin{cases} 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ 2 - 2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2;1).

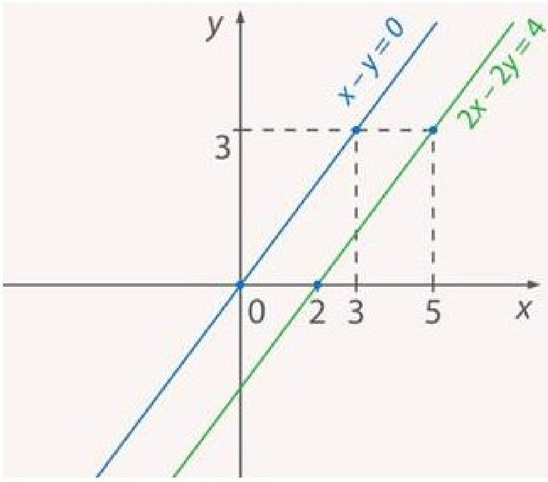
Когда у системы нет решений

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

Решение:

Построим графики уравнений. Возьмем по два решения для каждого из уравнений. Например, (0;0) и (3;3) для $x - y = 0$; (2;0) и (5;3) для $2x - 2y = 4$. Графики параллельны. Общих точек не существует. Решения у системы нет.



Можно ли это было увидеть, не строя графиков? Да, можно. Разделим обе части второго уравнения на 2:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Ни при каких значениях x и y левая часть не может быть равна 0 и 2 , и одновременно.

Ответ: Решений нет.

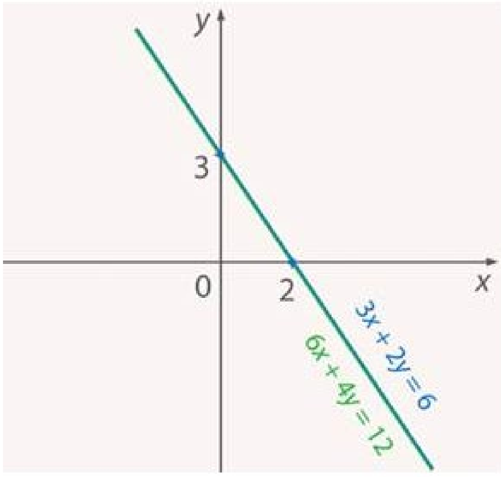
Когда у системы бесконечное множество решений

Пример 4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases}$$

Решение:

Найдем два решения первого уравнения: $3x + 2y = 6$. Например, (2;0) и (0;3). Но для второго уравнения $6x + 4y = 12$ они тоже подходят. Т. е. графики уравнений совпадают.



Каждая точка прямой является общей для обоих графиков, значит, является решением системы. Решений бесконечно много, они совпадают с множеством решений каждого уравнения.

Могли бы мы это увидеть без построения графика? Да, могли. Разделим обе части второго уравнения на 2:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

Система содержит два одинаковых уравнения. Но информация, повторенная второй раз, ничего нового не сообщает. Одно уравнение можно «удалить».Система эквивалентна одному уравнению:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

А её решения – это решения уравнения.

Количество решений

По виду системы линейных уравнений можно определить количество её решений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1. Бесконечное количество решений (прямые совпадают):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

1. Нет решений (прямые параллельны):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

2. Одно решение (прямые пересекаются):

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

2.1. Матрицы / Метод Гаусса / Метод Крамера

Матрицы

Матрица – это таблица, которая состоит из строк и столбцов, а на их пересечении находятся её элементы. Это могут быть либо конкретные значения, либо переменные. Чаще всего, чтобы обозначить элементы, под ними расставляют нижние индексы (например, a_{11} или a_{23}). Первый индекс означает номер строки, а второй – столбца. Над матрицами, как и над любым другим математическим элементом можно совершать различные операции. Таким образом, можно:

1) Вычитать и складывать одинаковые по размеру таблицы.
2) Умножать матрицу на какое-либо число или вектор.
3) Транспонировать: превращать строчки матрицы в столбцы, а столбцы – в строчки.
4) Умножать матрицы, если число строк одной их них равно количеству столбцов другой.

Подробнее обсудим все эти приёмы, так как они пригодятся нам в дальнейшем. Вычитание и сложение матриц происходит очень просто. Так как мы берём матрицы одинакового размера, то каждый элемент одной таблицы соотносится с каждым элементом другой. Таким образом, складываем (вычитаем) два этих элемента (важно, чтобы они стояли на одинаковых местах в своих матрицах). При умножении матрицы на число или вектор необходимо просто умножить каждый элемент матрицы на это число (или вектор). Значки на рабочем столе представляют собой матрицу, а при перемене положения она транспонируется и становится шире, но уменьшается в высоте.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Мы хорошо знаем понятие «система двух линейных уравнений» и умеем их решать. Но что делать, если число уравнений больше двух? В этом нам поможет метод Гаусса.

Конечно, этим методом удобно пользоваться, если сделать из системы матрицу. Но можно и не преобразовывать её и решать в чистом виде.

Гаусс предлагает следующее: проводить операции с уравнениями, чтобы, в конце концов привести всю совокупность к ступенчатому виду. То есть, нужно, чтобы сверху вниз (если правильно расставить) от первого уравнения к последнему убывало по одному неизвестному. Иными словами, нужно сделать так, чтобы у нас получилось, скажем, три уравнения: в первом – три неизвестных, во втором – два, в третьем – одно. Тогда из последнего уравнения мы находим первое неизвестное, подставляем его значение во второе или первое уравнение, и далее находим оставшиеся две переменные.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R3\ =\ R3\ -\cdot R1]{R2\ =\ R2-2\cdot R1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2-2\cdot1&5-2\cdot2&3-2\cdot3&0-2\cdot1&1-2\cdot0&0-2\cdot0\\1-1&0-2&8-3&0-1&0-0&1-0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R3=R3+2R2]{}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0+2\cdot0&-2+2\cdot1&5+2\cdot(-3)&-1+2\cdot(-2)&0+2\cdot1&1+2\cdot0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[R3=-1\cdot R3]{}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]\xrightarrow[R2=R2+3\cdot R3]{R1=R1-3\cdot R3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R1=R1-2\cdot R2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]$$

Метод Крамера

Для освоения этого метода жизненно необходимо владеть навыками сложения, вычитания матриц, а также нужно уметь находить определители. Поэтому, если вы плохо всё это делаете или совсем не умеете, придется поучиться и потренироваться.

В чём суть этого метода, и как сделать так, чтобы получилась система линейных уравнений Крамера? Всё очень просто. Мы должны построить матрицу из численных (практически всегда) коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений. Для этого просто берём числа перед неизвестными и расставляем в таблицу в том порядке, как они записаны в системе. Если перед числом стоит знак "–", то записываем отрицательный коэффициент. Итак, мы составили первую матрицу из коэффициентов при неизвестных, не включая числа после знаков равенства (естественно, что уравнение должно быть, приведено к каноническому виду, когда справа находится только число, а слева – все неизвестные с коэффициентами). Затем нужно составить ещё несколько матриц – по одной для каждой переменной. Для этого заменяем в первой матрице по очереди каждый столбец с коэффициентами столбцом чисел после знака равенства. Таким образом, получаем несколько матриц и далее находим их определители.

После того как мы нашли определители, дело за малым. У нас есть начальная матрица, и есть несколько полученных матриц, которые соответствуют разным переменным. Чтобы получить решения системы, мы делим определитель полученной таблицы на определитель начальной таблицы. Полученное число и есть значение одной из переменных. Аналогично находим все неизвестные.

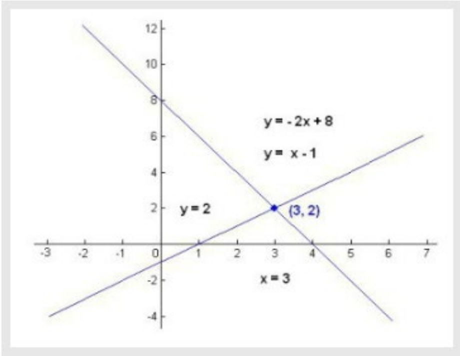
$$D=\begin{vmatrix}4&6\\8&-3\end{vmatrix}=-12-48=-60$$

$$D_x=\begin{vmatrix}3&6\\1&-3\end{vmatrix}=-9-6=-15$$

$$D_y=\begin{vmatrix}4&3\\8&1\end{vmatrix}=4-24=-20$$

Другие методы

Существует ещё несколько методов для того, чтобы получить решение систем линейных уравнений. Например, так называемый метод Гаусса-Жордана, который применяется для нахождения решений системы квадратных уравнений и тоже связан с применением матриц. Существует также метод Якоби для решения системы линейных алгебраических уравнений. Он легче всех адаптируется для компьютера и применяется в вычислительной технике.



Сложные случаи

Сложность обычно возникает, если число уравнений меньше числа переменных. Тогда можно наверняка сказать, что, либо система несовместна (то есть не имеет корней), или количество её решений стремится к бесконечности. Если у нас второй случай - то нужно записать общее решение системы линейных уравнений. Оно будет содержать как минимум одну переменную.

$$x - y = 3$$
$$x - y + y = 3 + y$$
$$x = 3 + y$$

$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 3 + y$$

Глава 3. Практическое применение систем линейных уравнений (Практическая часть)

Одной из моих задач было найти практическое применение системам линейных уравнений. Поэтому моя практическая часть будет посвящена решению задач, а также просто систем линейных уравнений.

Ещё в 7 классе мы столкнулись с необходимостью решать задачи через систему линейных уравнений. Поэтому сейчас я хотела бы вспомнить некоторые из них, а также алгоритм решения таких задач.

Алгоритм решения задачи с помощью системы линейных уравнений

- Обозначить неизвестные величины переменными («от смысла к буквам»).
- По условию задачи записать уравнения, связывающие обозначенные переменные.
- Решить полученную систему уравнений.
- Истолковать результат в соответствии с условием задачи («от букв к смыслу»).

Задача 1.

8 лошадей и 15 коров ежедневно съедают 162 килограмма травы. Сколько травы ежедневно съедает каждая лошадь и каждая корова, если известно, что 5 лошадей съедают травы на 3 килограмма больше, чем 7 коров?

Решение: Пусть x кг травы съедает за день каждая лошадь, y кг съедает за день каждая корова.

	Лошади	Коровы	Всего(разница)
I (уравнение)	8x	15y	162
II (уравнение)	5x	7y	3

Составим систему уравнения по условию задачи:

$$\begin{cases} 8x + 15y = 162 \\ 5x - 7y = 3 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 8 \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} 40x + 75y = 810 \\ 40x - 56y = 24 \end{cases}$$

$131y = 786$

$y = 6$ — 6 кг сена отпускали ежедневно одной корове.

$5x - 7 \cdot 6 = 3$

$5x = 3 + 42$

$5x = 45$

$x = 9$ — 9 кг сена выдавали ежедневно одной лошади.

Ответ: 9кг съедает лошадь, 6 кг съедает корова.

Задача 2.

Катер за 3 ч движения против течения реки и 2 часа по течению проходит 73 км. Найдите собственную скорость катера и скорость течения, если за 4 ч движения по течению катер проходит на 29 км больше, чем за 3 ч движения против течения.

Решение: Пусть v – скорость катера (км/ч), u – скорость течения (км/ч).

	t, ч	S,км	V,км/ч
По течению	2	$2(v + u)$	$v + u$
Против течения	3	$3(v – u)$	$v - u$

Составим систему уравнения по условию задачи:

$$\begin{cases}3(v-u)+2(v+u)=73\\4(v+u)-3(v-u)=29\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3v-3u+2v+2u=73\\4v+4u-3v+3u=29\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5v-u=73\\v+7u=29\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5(29-7u)-u=73\\v=29-7u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}145-35u-u=73\\v=29-7u\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-36u=-72\\v=29-7u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v=15\\u=2\end{cases}$$

Ответ: скорость катера 15 км/ч и скорость течения 2 км/ч

Задача 3.

5 карандашей и 3 тетрадки вместе стоили 170 руб. После того, как карандаши подешевели на 20%, а тетрадки подорожали на 30%, за 3 карандаша и 5 тетрадок заплатили 284 руб. Найдите первоначальную цену карандаша и тетрадки.

Решение: Пусть x – первоначальная цена карандаша, y – тетрадки.

	Карандаши, шт	Тетрадки, шт	Стоимость, руб
Начальная стоимость	$5x$	$3y$	170
Стоимость после подорожания и удешевления	$3x$	$5y$	284

Составим систему уравнения по условию задачи:

$$\begin{cases}5x+3y=170\\3\cdot0,8x+5\cdot1,3y=284\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+3y=170\,|\times\frac{2,4}{5}\\2,4x+6,5y=284\end{cases}\Rightarrow(-)\begin{cases}2,4x+1,44y=81,6\\2,4x+6,5y=284\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(6,5-1,44)y=284-81,6\\x=\frac{170-3y}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=202,4:5,06=40\\x=\frac{170-120}{5}=10\end{cases}$$

Ответ: карандаш сначала стоил 10 руб., тетрадка - 40 руб.

Задача 4.

Периметр прямоугольника равен 48 см. Его длина больше ширины в 3 раза. Найдите стороны прямоугольника.

Решение: Пусть a и b – длина и ширина прямоугольника.

Составим систему уравнения по условию задачи:

$$\begin{cases} P = 2(a+b) = 48 \\ a = 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 24 \\ a = 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b+b = 24 \\ a = 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b = 24 \\ a = 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 6 \end{cases}$$

Ответ*:* длина прямоугольника 18 см, ширина 6 см.

Но задачи, решаемые с помощью систем линейных уравнений, могут быть разного уровня сложности и употребляться в различных сферах жизни.

Вот, например, задача, которая может встретиться ребятам, сдающим ЕГЭ:

Задача 5.

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

<u>Решение:</u> Пусть *x*% – составляет зарплата мужа,

y% – зарплата жены,

z% – стипендия дочери

Составим систему уравнения по условию задачи:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+y+\dfrac{z}{3}=96 \quad \mid \times 3 \\ 2x+y+z=167 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+3y+z=288 \\ x+\underbrace{x+y+z}_{100}=167 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \overbrace{x+y+z}^{100}+2x+2y=288 \\ \Rightarrow x=67\% \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 100+2x+2y=288 \\ x=67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ x+y=94 \\ x=67 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ y=94-67 \\ x=67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=100-27-67 \\ y=27 \\ x=67 \end{cases}$$

Ответ: зарплата жены составляет 27%

Похожее уравнение с тремя переменными встретилось и мне. Поэтому в следующем примере разберём именно его:

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x-2y+3z=3, \\ 2x-2y-z=1, \\ 5x-6y+z=1. \end{cases}$

Выразим *x* из первого уравнения и выполним равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 3, \\ 2(2y - 3z + 3) - 2y - z = 1, \\ 5(2y - 3z + 3) - 6y + z = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 3, \\ 2y - 7z = -5, \\ 4y - 14z = -14, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 3, \\ y = \frac{7z-5}{2}, \\ 4 \cdot \frac{7z-5}{2} - 14z = -14. \end{cases}$$

Третье уравнение преобразуется к равенству 0 = -4, поэтому система не имеет решений.

Также во время написания моей исследовательской работы, мне попались другие не менее интересные системы:

Задача 6

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5; \\ \frac{2}{x+y} + \frac{9}{y-x} = -1. \end{cases}$$

Решение:

ОДЗ

$$\begin{cases} x + y \neq 0, \\ x - y \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq -y, \\ x \neq y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5 \\ \frac{2}{x+y} + \frac{9}{y-x} = -1 \end{cases}$$

Замена: $\frac{2}{x+y} = a$; $\frac{3}{x-y} = b$

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - 3b = -1 \end{cases}$$

$b = 5 - 2a$

$a - 3(5 - 2a) = -1$

$a - 15 + 6a = -1$

$7a = 14$

$a = 2$

$b = 5 - 2 \cdot 2$

$b = 5 - 4 \Rightarrow b = 1$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+y} = \frac{2}{1} \\ \frac{3}{x-y} = \frac{1}{1} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$x = 1 - y$

$1 - y - y = 3$

$1 - 2y = 3$

$-2y = 3$

$-2y = 2$

$\boxed{y = -1}$

$x = 1 + 1$

$\boxed{x = 2}$

Ответ: $(2; -1)$

Задача 7

Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений (без построения)

$$\frac{x+2y}{4}-\frac{4x-2y}{3}=\frac{1}{12} \text{ и } \frac{x+2y}{6}-\frac{2y-4x}{4}=1.$$

<u>Решение:</u>

Для нахождения точки пересечения необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{4}-\frac{4x-2y}{3}=\frac{1}{12} & |\cdot 12 \\ \frac{x+2y}{6}-\frac{2y-4x}{4}=1 & |\cdot 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x+2y)-4(4x-2y)=1, \\ 2(x+2y)-3(2y-4x)=12, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+6y-16x+8y=1, \\ 2x+4y-6y+12x=12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13x+14y=1; \\ 14x-2y=12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13x+14y=1, \\ 7x-y=6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=7x-6, \\ -13x+14(7x-6)=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=7x-6, \\ -13x+98x-84=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=7x-6, \\ 85x=85, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=7-6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: (1;1)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной исследовательской работы, мы узнали о том, что такое системы линейных уравнений состоящие из трёх линейных уравнений. Системы линейных уравнений являются очень важной частью математических задач. Они используются в самых разных областях науки: от экономики, биологии и физики до инженерии и информатики. Метод Гаусса, метод Крамера и матричный метод являются основными инструментами для решения этих систем.

Поставленная нами гипотеза была подтверждена. Мы решили задачу с помощью системы уравнений, состоящей из трёх линейных уравнений и трёх неизвестных. Эту задачу мы взяли из ЕГЭ.

Понимание свойств линейных систем, их определенности и ограничений методов решения – позволяет нам эффективно применять их для моделирования и решения реальных задач. Знание и умение применять эти методы является ключевым для любого специалиста, работающего с математическими моделями.

Математика настолько загадочна и удивительна, что занимаясь данным исследованием, понимаешь, если бы каждый из нас уделял ей больше внимания, то нашел бы для себя много нового и интересного.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. https://fb.ru/article/267792/sistemyi-lineynyih-algebraicheskih-uravneniy-odnorodnyie-sistemyi-lineynyih-algebraicheskih-uravneniy
2. https://dzen.ru/a/Y9VtbzORMFOJBBwy
3. https://lc.rt.ru/classbook/matematika-7-klass/lineinaya-funktsiya-i-lineinye-uravneniya-profilnyi-uroven/4853
4. https://berdov.com/works/algebra/system_of_linear_equations/
5. https://externat.foxford.ru/polezno-znat/wiki-algebra-metody-resheniya-sistem-linejnyh-uravnenij
6. https://ru.ruwiki.ru/wiki/Система_линейных_алгебраических_уравнений
7. https://spravochnick.ru/matematika/sistemy_lineynyh_uravneniy/
8. https://multiurok.ru/index.php/files/priezientatsiia-iz-istorii-rieshieniia-sistiem-ura.html
9. https://telegra.ph/Gde-ispolzuyutsya-sistemy-linejnyh-uravnenij-Sistemy-linejnyh-uravnenij-Ot-osnov-do-prakticheskogo-primeneniya-01-06
10. https://infourok.ru/prezentaciya-na-temu-primenenie-sistem-lineynih-uravneniy-dlya-resheniya-prikladnih-zadach-2813800.html
11. https://skysmart.ru/articles/mathematic/reshenie-prostyh-linejnyh-uravnenij
12. https://sdo-test.nsuem.ru/pluginfile.php/325073/mod_resource/content/1/Системы%20раб.pdf
13. https://reshator.com/sprav/algebra/7-klass/graficheskij-metod-resheniya-sistemy-linejnyh-uravnenij/
14. https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=99568
15. https://zftsh.online/course/3351/zadachi-